

**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**  
**Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica**  
**Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial**  
**Ano Lectivo: 2002/2003**

**ANÁLISE NUMÉRICA**

**Exercícios**

**8.1.** Considere o integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

**a)** Determine o seu valor aproximado, considerando quatro subintervalos e utilizando:

- (i)** A regra dos trapézios.
- (ii)** A regra de Simpson.

**b)** Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar, se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com um erro inferior a  $10^{-4}$ , utilizando:

- (i)** A regra dos trapézios.
- (ii)** A regra de Simpson.

**8.2.** Suponha que a função  $f$  é definida no intervalo  $[0, b]$ , do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x - 1, & 1 \leq x \leq b. \end{cases}$$

**a)** Obtenha aproximações para o integral

$$I(f) = \int_0^b f(x) dx,$$

com  $b = 2$  e  $b = 3$ , dos seguintes modos:

- (i)** Utilizando a regra dos trapézios composta, com passo  $h = 1$ .
- (ii)** Utilizando a regra de Simpson (simples).

**b)** Determine o erro de cada um dos resultados obtidos, comparando com o valor exacto de  $I(f)$ .

**c)** A fórmula do erro da regra dos trapézios é aplicável neste caso? E a da regra de Simpson? Justifique.

**8.3.** Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$ :

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	1/2	-1/2

a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau  $\leq 2$ ,  $p_2(x)$ , que interpola  $f(x)$  nos pontos  $x_0 = -2$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_4 = 2$ .

b) Suponha que pretendemos aproximar

$$I(f) = \int_{-2}^2 f(x)dx, \quad \text{por} \quad I_2(f) = \int_{-2}^2 p_2(x)dx.$$

Sabendo que as derivadas de  $f$  verificam  $|f^{(j)}(x)| \leq j/2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , no intervalo  $[-2, 2]$ , determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

**8.4.** A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral  $I(f)$  de uma certa função  $f$  indefinidamente diferenciável.

$N$	8	16	32	64
$I_n^{(N)}$	295.27	274.15	268.97	267.68

O valor  $I_n^{(N)}$  representa a aproximação obtida, com  $N + 1$  nós de integração. Sabendo que o valor exacto do integral é  $I(f) = 267.25$ , diga, justificando, que fórmula poderá ter sido utilizada (trapézios ou Simpson).

**8.5.** Calcule o valor aproximado de

$$I = \int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

usando:

a) A regra dos trapézios composta com 5 nós de integração igualmente espaçados, e determine um majorante do erro.

b) A regra de Simpson simples, e determine um majorante do erro.

**8.6.** Sabe-se que a função  $f \in C^4(-2, 10)$  toma os valores  $f(1) = -2$ ,  $f(4) = 7$ ,  $f(10) = 6$ , e que 1, 4 e 10 são pontos fixos de  $f \circ f$ .

a) Determine o valor aproximado de

$$I(f) = \int_{-2}^{10} f(x)dx,$$

usando a regra de Simpson com 5 nós de quadratura.

b) Admitindo que  $|f^{(4)}(x)| \leq 10$ , determine um majorante do erro absoluto cometido em a).

**8.7.** Considere a regra de Simpson composta num intervalo  $[a, b]$  e o valor aproximado para  $N$  subintervalos, dado por  $S_N(f)$ . Mostre que quando  $f^{(4)}$  é constante se verifica a condição para o erro

$$15E_{2N}(f) = S_{2N}(f) - S_N(f).$$

**8.8.** Aplique a regra dos trapézios composta para aproximar os integrais

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} dx, \quad I_2 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$$

Estime a ordem de convergência em ambos os casos. Note que  $I_1 \approx 7.95492652101284$  e  $I_2 = 2$ .

**8.9.** Seja  $f \in C[a, b]$  uma função tal que  $f'$  é integrável em  $[a, b]$ .

a) Prove a seguinte estimativa do erro para a regra dos trapézios composta:

$$E_1^{(N)}(f) = \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \frac{x_{j-1} + x_j}{2} - x \right) f'(x) dx,$$

onde  $x_j = a + jh$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ .

b) Calcule um valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx,$$

pela regra dos trapézios composta com  $h = \frac{1}{6}$ . Estime o erro.

**8.10.** Demonstre que na regra de integração do ponto médio se tem:

$$\int_{x_0 - \frac{h}{2}}^{x_0 + \frac{h}{2}} f(x) dx = hf(x_0) + E_0(f),$$

onde

$$E_0(f) = \frac{h^3 f''(\theta)}{24} \quad \text{com} \quad \theta \in \left[ x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} \right].$$

**8.11.** Pretende-se construir uma fórmula de quadratura do tipo

$$I_1(g) = A_0 g(0) + A_1 g(1)$$

para aproximar o integral

$$I(g) = \int_0^1 e^x g(x) dx.$$

a) Calcule  $A_0$  e  $A_1$  de modo a que a fórmula seja exacta para funções  $g(x) = a + bx$  ( $a$  e  $b$  reais).

b) Seja  $g(x) = \sin x$ . Obtenha uma aproximação de  $I(g)$  usando a regra de quadratura obtida em a) e calcule uma estimativa do erro absoluto.

c) Determine um valor aproximado para  $I(g)$  usando a regra dos trapézios composta com 4 subintervalos.

**d)** Determine o número mínimo de subintervalos necessário na regra dos trapézios composta para garantir que o erro absoluto do resultado seja inferior a  $10^{-2}$  (despreze erros de arredondamento).

**8.12.** Pretende-se obter uma fórmula de integração com dois nós no intervalo  $[-1, 1]$ , isto é, uma fórmula do tipo:

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

para aproximar o integral

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

**a)** Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular  $A_0$  e  $A_1$  de modo a que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

**b)** Resolva o sistema em ordem a  $A_0$  e  $A_1$ .

**c)** Mostre que, se  $x_0$  e  $x_1$  forem tais que  $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$ , a fórmula de integração assim obtida tem, pelo menos, grau 2.

**8.13. a)** Determine uma fórmula de quadratura

$$I_1(f) = 2f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

que seja exacta para os polinómios de grau 2 no intervalo  $[0, 1]$ .

**b)** Indique como construir uma fórmula composta, partindo da expressão obtida na alínea a).

**8.14.** Pretende-se calcular

$$Z(\alpha, m) = \int_{-1}^1 (x^\alpha + 2) \cos(m \arccos(x)) dx.$$

**a)** Considere a aproximação de  $Z(1, 2)$  e de  $Z(2, 2)$  usando a integração de Gauss-Legendre com dois nós de quadratura. Alguns destes valores é exacto, qual?

**b)** Calcule o valor aproximado de  $Z(2, m)$  usando a regra de Simpson simples. Determine o valor exacto de  $Z(2, 2)$  através da fórmula do erro.

**8.15. a)** Determine uma fórmula de quadratura do tipo

$$I_1(f) = A_0 f(-c) + A_1 f(c),$$

que seja exacta para integrais  $I(x^k)$ , com  $k = 0, 1, 2$ , onde

$$I(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx.$$

b) Utilize a fórmula obtida em a) para calcular exactamente

$$J = \int_{-1}^0 \frac{1 - x + x^2}{x^2 + 1} dx.$$

c) Calcule o valor aproximado do integral definido em b) usando a fórmula de integração de Gauss-Legendre com 3 nós de integração.

**8.16.** Considere o integral

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

a) Aproxime  $I(f)$  pela fórmula de Gauss-Chebyshev com 2, 4 e 6 nós de integração.

b) Estime o erro utilizando a aproximação

$$E_n(f) \approx I_{n+2}(f) - I_n(f).$$

**8.17.** Para aproximar o integral

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x) dx,$$

considere a fórmula de quadratura

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

com  $x_0 = 2 - \sqrt{2}$  e  $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ . Determine os pesos  $A_0$  e  $A_1$  de tal modo que a fórmula seja pelo menos de grau 1. Mostre que a fórmula assim obtida é de grau 3.

**8.18.** Considere os integrais

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x} f(x) dx.$$

a) Deduza uma fórmula de quadratura que seja exacta para  $I(a + bx)$ , usando um único nó de integração em  $[0, 1]$ .

b) Indique a fórmula composta, e calcule uma aproximação do integral  $I(\cos(x^2))$  usando 4 subintervalos.

**8.19.** Utilize as fórmulas de Newton-Cotes fechadas com  $n = 2, 4, 6, 10$  e  $14$  para aproximar o integral

$$I = \int_{-4}^4 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Compare os resultados com a solução exacta  $I = 2 \arctan 4 \approx 2.65163533$ . Comente.

**8.20.** Considere a equação integral (de Volterra de segunda espécie)

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)y(t) dt, \quad 0 \leq x \leq b. \quad (1)$$

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pontos equidistantes do intervalo  $[0, b]$ , com  $h = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$  e seja  $y(0) = f(0)$ . Pretende-se aproximar os valores da solução da equação (??) nos pontos  $x_i, i = 0, \dots, n$ , pelo seguinte método numérico.

### MÉTODO

Para a solução exacta tem-se

$$y(x_i) = f(x_i) + \int_0^{x_i} K(x_i, t)y(t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para aproximar o integral

$$I(K, y) = \int_0^{x_i} K(x_i, t)y(t) dt,$$

usa-se uma quadratura numérica. Por exemplo, usando a regra dos trapézios composta, obtém-se

$$I(K, y) \approx Q_1^i(K, y) = h \left[ \frac{1}{2} K(x_i, 0)y(0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)y(x_j) + \frac{1}{2} K(x_i, x_i)y(x_i) \right].$$

Segue-se que a solução aproximada  $Y_i, i = 1, \dots, n$ , satisfaz a equação

$$Y_i = f(x_i) + h \left[ \frac{1}{2} K(x_i, 0)f(0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j)Y_j + \frac{1}{2} K(x_i, x_i)Y_i \right], \quad (2)$$

ou seja, uma vez conhecidos os valores de  $Y_j$  para  $j \leq i - 1$ , a aproximação  $Y_i$  é obtida da equação (??).

Aplique o método acima para aproximar a equação integral

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

com  $n = 10, 20$  e  $40$ . Compare com a solução exacta

$$y(x) = x + \frac{x^3}{6}.$$

Com base nos resultados obtidos, analise a ordem de convergência do método.