

**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**  
**Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica**  
**Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial**  
Ano Lectivo: 2002/2003

**ANÁLISE NUMÉRICA**

**Exercícios**

**5.1.** Considere a equação

$$\sin x - e^{-x} = 0.$$

- a) Prove que esta equação tem uma raiz  $z \in [0.5, 0.7]$ .
- b) Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha  $z$ .
- c) Determine o número  $m$  de iterações necessárias para garantir  $|z - x_m| < 10^{-6}$ .

**5.2.** Considere a equação

$$3x^2 - e^x = 0.$$

- a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.
- b) Considere a seguintes sucessões

$$(S1) \quad x_{m+1} = \sqrt{\frac{e^{x_m}}{3}}; \quad (S2) \quad x_{m+1} = \ln(3x_m^2).$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação usando, para cada raiz, uma dessas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial  $x_0$ .

- c) Efectue duas iterações usando a sucessão (S1) com  $x_0 = 1$ . Estime o número de algarismos significativos da aproximação obtida.
- d) Será possível usar a sucessão (S1) para aproximar a maior raiz positiva da equação? E poderá usar a sucessão (S2) para aproximar a menor raiz positiva da equação?
- e) Determine uma função iteradora  $g$  tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

**5.3.** Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:

$$x_0 = 1, \quad x_{m+1} = 1 - \frac{1}{bx_m}, \quad m = 0, 1, \dots$$

onde  $b$  é um número real dado.

- a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que se  $b > 4$  esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

b) Considere  $b = \frac{25}{4}$ . Usando a definição de ponto fixo, calcule  $z = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ .

c) Para o mesmo valor de  $b$ , mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo  $[\frac{4}{5}, 1]$  e que se verifica

$$|z - x_{m+1}| \leq \frac{4}{75} \left(\frac{1}{4}\right)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

**5.4.** Considere a função

$$g(x) = \frac{1}{3} \ln(x^2 + 1).$$

a) Prove que a sucessão definida por  $x_{m+1} = g(x_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , converge para um número  $z \in [-1, 1]$ , qualquer que seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Determine  $z$  e a ordem de convergência.

b) Efectue algumas iterações, começando com  $x_0 = 5$ , e calcule os quocientes

$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2}, \quad \frac{|e_2|}{(e_1)^2}, \quad \frac{|e_3|}{(e_2)^2}, \dots$$

Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea anterior?

**5.5.** A equação  $x^2 = a$ , com  $a > 0$ , pode escrever-se sob a forma  $x = g(x)$ , onde  $g(x) = a/x$ . Considere o método do ponto fixo para aproximar a raiz positiva da equação. Mostre que o método é divergente qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0 \neq \sqrt{a}$ .

**5.6.** Considere a função

$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}.$$

a) Sendo  $\{x_m\}$  a sucessão numérica definida por  $x_{m+1} = g(x_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , mostre que esta sucessão tem um limite finito  $z \in [0, 1]$ , qualquer que seja  $x_0 \in [0, 1]$ .

b) Verifique que a função  $g$  tem um (único) ponto fixo no intervalo  $[2, 3]$ . Poderá usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora  $g$ ?

**5.7.** Pretende-se determinar uma raiz da equação  $x = g(x)$  pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a  $0.5 \times 10^{-4}$ . Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789, \quad x_5 = 0.43814.$$

Sabendo que  $|g'(x)| \leq 0.4$ , determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

**5.8.** Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0.$$

a) Mostre que a equação tem apenas três raízes reais,  $z_1 < z_2 < z_3$ , tais que  $z_1 \in [-1, 0]$ ,  $z_2 \in [0, 1]$  e  $z_3 \in [4, 5]$ .

b) Para aproximar as raízes positivas da equação, considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}.$$

- (i) Mostre que  $z_2$  e  $z_3$  são pontos fixos de  $g$ .
- (ii) Mostre que o método iterativo associado a  $g$  converge para  $z_2$ , qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0 \in [0, 1]$ .
- (iii) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz  $z_3 \in [4, 5]$ .
- c) Considere o método de Newton para aproximar a raiz  $z_3 \in [4, 5]$  da equação.
- (i) Prove que está assegurada a convergência do método de Newton, qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0 \in [4.1, 4.4]$ . Determine ainda a ordem de convergência do método.
- (ii) Partindo de  $x_0 = 4.1$ , calcule  $x_1$ . Sem efectuar mais iterações, determine um majorante para  $|z_3 - x_2|$ .

**5.9.** Considere a iteração do ponto fixo  $x_{m+1} = g(x_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , com as funções iteradoras

$$g_1(x) = 1 + \operatorname{arctg}(x), \quad g_2(x) = \frac{x(x^2 + 6)}{3x^2 + 2}.$$

a) Para cada um dos pontos fixos de  $g_1$  e de  $g_2$  procure um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas.

b) Aproxime os pontos fixos de  $g_1$  e de  $g_2$  com um erro inferior a  $10^{-6}$ . Determine a ordem da convergência para cada uma das iterações?

**5.10.** Considere a função

$$f(x) = 2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \frac{1}{1 + x^2}.$$

Aproxime, com um erro inferior a  $10^{-4}$ , todas as raízes da equação  $f(x) = 0$ .

**5.11. a)** Determine, com um erro inferior a  $10^{-4}$ , o valor mínimo de  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$a\sqrt{x} \geq \sin x, \quad \forall x \geq 0.$$

b) Sendo  $g \in C^1(\mathbb{R})$  uma função tal que  $g(x) \leq g(\mu) = \gamma$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , considere o método iterativo

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_{m+1} = \mu + g(x_m) - \gamma, \quad m = 0, 1, \dots$$

Mostre que o método acima converge para  $\mu$  desde que  $x_0$  esteja suficientemente próximo de  $\mu$ . Determine a ordem da convergência.

**5.12.** Considere o seguinte método iterativo

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_{m+1} = \frac{\alpha x_m + 1 + 2e^{-x_m}}{2 + \alpha}, \quad m = 0, 1, \dots$$

com  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

a) Mostre que para todo o  $\alpha \in [0, 1]$  o método converge para a solução da equação

$$f(x) = e^x - 2xe^x + 2 = 0,$$

qualquer que seja  $x_0 \geq 0$ .

Sugestão: Utilize o teorema do ponto fixo no intervalo  $[0, \max\{2, x_0\}]$ .

b) Determine o valor de  $\alpha$  de tal modo que a convergência seja a mais rápida possível.

c) Aplique o método para aproximar a solução da equação  $f(x) = 0$  com um erro inferior a  $10^{-5}$ .

**5.13.** Pretende-se determinar um valor  $x$  que verifique a equação

$$\cos(x) = -\cos(x + a \cos(x)).$$

a) Mostre que se  $a \neq 0$  isso é equivalente a encontrar  $z = g(g(z))$ , com

$$g(x) = x + a \cos(x),$$

e que se  $a = 1$ ,  $g$  tem um único ponto fixo no intervalo  $I = [1, 3]$ . Justifique que para  $a = 1$  a solução da equação é única em  $I$  e coincide com o ponto fixo de  $g$ .

b) Considere os valores de a). Calcule duas iterações pelo método do ponto fixo aplicado à função  $g$  começando com  $x_0 = \pi/2$  e com  $x_0 = 1$ . O que pode concluir? Calcule o valor exacto do erro  $|e_2|$  com 8 dígitos correctos, quando começa com  $x_0 = 1$ . Mostre que a ordem de convergência local é cúbica.

c) Considere os valores de a). Começando com  $z_0 = 1$ , e sendo  $z_m = g(z_{m-1})$ , considere os pontos  $(x_m, y_m)$  com  $x_m = \log |z - z_m|$  e  $y_m = \log |z - z_{m+1}|$ , onde  $z$  é o ponto fixo de  $g$ . Quando  $m \rightarrow \infty$  os pontos  $(x_m, y_m)$  irão aproximar-se de uma recta  $y = \alpha x + \beta$ . Determine os valores dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ .

**5.14.** Mostre que, para  $a > b \geq 1$ , a sucessão

$$x_0 = 1, \quad x_{m+1} = a + \frac{b}{x_m}, \quad m = 0, 1, \dots$$

converge alternadamente para a solução da equação  $x^2 - ax - b = 0$  que se encontra no intervalo  $[a, a + b]$ .

Nota. Esta sucessão define aquilo que se designa por *fracção contínua*, ou seja,

$$x = a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{\ddots}}}$$

no caso particular em que  $a_m = a, b_m = b$ .

**5.15.** Seja  $g$  uma função contínua tal que  $g(a) = b$  e  $g(b) = a$ .

a) Mostre que existe pelo menos um ponto fixo de  $g$  em  $[a, b]$ .

b) Mostre que se  $g \in C^1([a, b])$  então a derivada de  $g$  toma o valor  $-1$  em algum ponto desse intervalo. O que pode concluir quanto à contractividade de  $g$  nesse intervalo?

**5.16.** Considere  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$  uma equação em  $\mathbb{R}$  que tem pelo menos duas raízes  $z_1$  e  $z_2$  consecutivas (ou seja, não existe nenhuma outra raiz entre elas).

a) Mostre que se  $g \in C^1(\mathbb{R})$  e  $|g'(z_1)| < 1$  então  $g'(z_2) \geq 1$ .

b) Suponha que  $z_2 \in I = [a, b]$ , que  $|g'(x)| > 1, \forall x \in I$  e que  $I \subseteq g(I)$ . Mostre que o método  $x_{m+1} = g^{-1}(x_m)$  converge para  $z_2$  qualquer que seja  $x_0 \in I$ .

c) Seja  $f \in C^p(\mathbb{R})$ , tal que a raiz  $z_2$  tem multiplicidade  $p \geq 1$ , e seja  $g$  tal que  $g'(z_2) > 1$ . Indique uma função iteradora que assegure uma convergência local linear para  $z_2$ , e uma outra que assegure convergência quadrática, para cada caso de  $p$ .

**5.17.** Ao utilizar o método do ponto fixo para determinar uma raiz de uma equação, foram obtidos os valores

$$\begin{aligned} x_3 &= -0.914260304, & x_4 &= -0.825329540, \\ x_5 &= -0.884002249, & x_6 &= -0.847330076. \end{aligned}$$

a) Sabendo que a função iteradora era um polinómio do quarto grau, da forma  $p(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ , determine aproximadamente as duas raízes reais da equação.

b) Determine os valores possíveis para  $x_2$ .

c) Determine uma estimativa para a majoração do erro absoluto em  $x_{20}$ .

**5.18.** Considere um intervalo  $I = [a, b]$  que tem um único ponto fixo  $z$  de uma função  $g \in C^1(I)$ . Seja  $g'(z) = 1$ .

a) Mostre que se  $0 < g'(x) < 1, \forall x \in I \setminus \{z\}$ , então o método do ponto fixo converge qualquer que seja  $x_0 \in I$ .

Sugestão: Verifique que a sucessão definida pelo método do ponto fixo é estritamente monótona e limitada.

b) Aplique este resultado para mostrar que  $x_{m+1} = \sin(x_m)$  converge para 0, qualquer que seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**5.19.** Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

a) Mostre que se  $x_0$  for escolhido no intervalo  $[2.6, 3]$  estão asseguradas as condições de convergência do método.

b) Calcule um majorante para o erro da segunda iterada (não efectue iterações).

**5.20.** Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de  $\sqrt{10}$ :

**a)** Método de Newton aplicado à função  $f(x) = x^2 - 10$ . Mostre que se escolher  $x_0 = 4$  então o método de Newton converge e a ordem é dois (note que pode concluir convergência se escolher para  $x_0$  qualquer valor  $\geq 4$ ). Calcule três iteradas e determine um majorante para o erro de  $x_3$ . Quantos algarismos significativos pode garantir?

**b)** Método de Newton aplicado à função  $f(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$ . Admitindo que o método converge, mostre que a ordem de convergência é 3.

**5.21.** Mostre que a equação

$$\ln x - (x - 2)^2 = 0,$$

tem duas e só duas raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial:  $x_0 = 2.1$ ,  $x_0 = 2.5$  ou  $x_0 = 1.4$ . Mostre que para o  $x_0$  que escolheu estão garantidas as condições de convergência e efectue uma iteração.

**5.22.** Para calcular a raiz quadrada do número  $a > 0$  recorre-se frequentemente ao método iterativo

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_{m+1} = \frac{1}{2} \left( x_m + \frac{a}{x_m} \right), \quad m = 0, 1, \dots$$

**a)** Verifique que esta fórmula corresponde à utilização do método de Newton para resolver o problema.

**b)** Mostre que o erro do método satisfaz a condição

$$e_{m+1} = -\frac{e_m^2}{2x_m},$$

onde  $e_m = z - x_m$ .

**5.23.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^4$ . Considere a seguinte modificação do método de Newton para a aproximação dos zeros de  $f$ :

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_{m+1} = x_m - \frac{\Phi(x_m)}{\Phi'(x_m)}, \quad m = 0, 1, \dots$$

onde  $\Phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ . Mostre que o método tem ordem de convergência quadrática também no caso em que os zeros de  $f$  são múltiplos.

**5.24.** O método iterativo

$$x_0 = 1, \quad x_{m+1} = \frac{p-1}{p} x_m + \frac{a}{p x_m^{p-1}}, \quad m = 0, 1, \dots$$

permite obter em poucas iteradas uma boa aproximação de  $\sqrt[p]{a}$ , onde  $p, a > 1$ . Escolha um intervalo adequado em que estejam satisfeitas as condições suficientes para a convergência

do método de Newton. Calcule uma aproximação de  $\sqrt[3]{231}$  garantindo um erro absoluto inferior a  $10^{-3}$ .

Nota. É claro que a aproximação inicial  $x_0 = 1$  não é boa e pode ser melhorada, por exemplo, considerando  $x_0 = 1 + \frac{a}{p}$ , ou simplesmente encontrando um  $x_0$  tal que  $x_0^p < a < (x_0 + 1)^p$ . (Para  $\sqrt[3]{231}$  bastaria reparar que  $6^3 = 216 < 231 < 343 = 7^3$  e considerar  $x_0 = 6$ ).

Uma utilidade deste resultado é a de permitir calcular aproximações de raízes de ordem  $p$  utilizando apenas operações elementares (por exemplo, quando estamos na posse de uma calculadora rudimentar que não calcula raízes!).

Acontece, por vezes, que as raízes calculadas pela máquina aparecem só em precisão simples, podendo servir esse valor como aproximação inicial para este método iterativo, que ao fim de muito poucas iterações (normalmente 1 ou 2) garante todos os dígitos em precisão dupla, ou mesmo superior!

**5.25.** Considere a função

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - x.$$

**a)** Mostre que o método de Newton converge quadraticamente para o único zero de  $f$ , qualquer que seja a iterada em  $[0.5, 1.5]$ .

**b)** Calcule a primeira iterada  $x_1$  começando com  $x_0 = 1$  e justifique que  $|e_1| \leq 0.025$ .

**c)** Calcule  $x_3$  e apresente uma estimativa de erro.

**d)** Com base nos valores  $x_0$  e  $x_1$  obtido em b) calcule  $x_2$  pelo método da secante. Este método também irá convergir?

**5.26.** Considere a equação

$$f(x) = x \tan(x) - 1 = 0.$$

Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo  $[0.8, 0.9]$ . Determine um majorante do erro do resultado obtido.

**5.27.** Para obter um valor aproximado da raiz cúbica de um número real  $a$ , pretende-se utilizar o método da secante.

**a)** Escreva a fórmula iteradora do método para um valor de  $a$  arbitrário.

**b)** Considere o caso de  $a = 2$ . Tomando como aproximações iniciais  $x_0 = 1, x_1 = 2$ , verifique que as condições de convergência do método estão satisfeitas e efectue iterações até obter uma aproximação com três algarismos significativos.

**5.28.** Sabendo que  $h \in C^2(I)$  e  $h' \in C^1(I)$  são funções crescentes, e que  $h$  tem uma raiz no intervalo  $I = [-1, 1]$ , pretende-se determinar a raiz da equação

$$f(x) = x + h(x) = 0,$$

usando o método

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{m+1} = x_m - \frac{(x_m - x_{m-1})f(x_m)}{f(x_m) - f(x_{m-1})}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Verifique que  $f$  tem uma raiz única em  $I$  e que existem valores  $a, b \in I$  para os quais o método converge. Que pode dizer relativamente à ordem de convergência?

**5.29.** Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1 = \frac{0.5}{1 + (x_1 + x_2)^2} \\ x_2 = \frac{0.5}{1 + (x_1 - x_2)^2} \end{cases}$$

Mostre que o sistema tem uma única solução e aproxime-a pelo método do ponto fixo. Obtenha uma estimativa do erro para a solução aproximada na norma do máximo.

**5.30.** Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{4} \cos(x_1) = 0 \\ 1 - x_2 + |x_1 - 1| = 0 \end{cases}$$

**a)** Mostre que existe uma e uma só solução  $x \in [0, 1] \times [1, 2]$ .

**b)** Determine uma aproximação da solução por forma a que o erro absoluto verifique  $\|e\|_\infty < 0.05$ .

**5.31.** Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1 = f(x_1 + x_2) \\ x_2 = g(x_1 + x_2) \end{cases}$$

em que as funções  $f$  e  $g$  verificam  $|f'(t)| < \alpha$ ,  $|g'(t)| < \beta$ , para qualquer  $t \in \mathbb{R}$  e em que  $f(\mathbb{R}) \subseteq [a, b]$ ,  $g(\mathbb{R}) \subseteq [a, b]$ .

**a)** Mostre que existe uma única solução do sistema em  $\mathbb{R}^2$  se  $\alpha + \beta < 1$ , que essa solução se encontra em  $[a, b] \times [a, b]$ , e que o método do ponto fixo converge, quaisquer que sejam os valores iniciais em  $\mathbb{R}$ .

**b)** Reduza o sistema anterior à resolução de duas equações em  $\mathbb{R}$ , e mostre o mesmo resultado que em a).

**c)** Concretize os resultados anteriores para o sistema

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \cos(x_1 + x_2) - \cos^2\left(\frac{1}{5}(x_1 + x_2)\right) \\ x_2 = \sin\left(\frac{1}{3}(x_1 + x_2)\right) + \frac{1}{4} \sin^2(x_1 + x_2) \end{cases}$$

**d)** Começando com  $(0, 0)$ , determine uma iterada pelo método de Newton em  $\mathbb{R}^2$  para a aproximação da solução do sistema anterior.

**5.32.** Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \varepsilon \cos(x_3) = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3\varepsilon x_1 x_3 = 0 \\ \varepsilon x_1^2 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que para  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  o sistema tem solução única no conjunto

$$S = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1|, |x_2|, |x_3| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

b) Usando a função iteradora

$$G(x) = \left( -\frac{1}{2}(x_2 + \varepsilon \cos(x_3)), -\frac{x_1}{3} + \varepsilon x_1 x_3, \frac{1}{3}(x_2 - \varepsilon x_1^2) \right),$$

mostre que, aplicando o método do ponto fixo, se tem

$$|x_3 - x_3^{(m)}| \leq \frac{5^m}{6^{m-1}} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

qualquer que seja o vector inicial  $x^{(0)} \in S$ .

c) No caso  $\varepsilon = 0$ , mostre que o método de Jacobi converge e que temos

$$\|x^{(m)}\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \|x^{(0)}\|_\infty$$

para qualquer  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ .

**5.33.** Considere o sistema não-linear

$$\begin{cases} 2x_1 - \cos(x_1 + x_2) = 2 \\ 3x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 6 \end{cases}$$

a) Verifique que existe uma e uma só solução em  $\mathbb{R}^2$  e que ela está em  $X = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$ .

b) Inicializando com  $x^{(0)} = [1 \ 1]^T$  calcule duas iterações pelo método do ponto fixo.

c) Efectue o mesmo que em b) usando o método de Newton.

**5.34.** Considere um sistema de equações escrito na forma  $F(x) = 0$ , e seja  $J_F(x)$  a matriz jacobiana de  $F$  calculada em  $x$ .

a) Mostre que se existir um  $\omega \in \mathbb{R}$  tal que  $\|I + \omega J_F(x)\| \leq L < 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , então o sistema possui uma única solução em  $\mathbb{R}^n$ .

b) Conclua que o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + \sin(x_3) = 1 \\ x_1 + 4x_2 + \cos(x_3) = 1 \\ \sin(x_1) + \cos(x_2) + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

tem uma única solução em  $\mathbb{R}^3$ , que está no conjunto  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}] \times [-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}]$ .

c) Determine uma aproximação dessa solução calculando duas iterações pelo método de Newton, começando com a iterada inicial  $x^{(0)} = 0$ .

**5.35.** Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) = 10 \\ 3(x_2 + 1) + x_3^2 = 11 \\ 3x_1 + x_3^2 = 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial  $x^{(0)} = [3 \ 2 \ 1]^T$ .

a) Mostre que o sistema linear  $Ax = b$  a ser resolvido para se obter  $x^{(1)}$  é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenha ainda o vector  $b$ .

b) Resolva o sistema linear obtido em a), pelo método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot, e obtenha  $x^{(1)}$ .

**5.36.** Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^{x_1} - 3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1^2 + 2x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

a) Tomando como aproximação inicial  $x^{(0)} = [0 \ 1 \ 2]^T$ , ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

**5.37.** Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x_1^3 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ e^{x_2} - x_3^2 = 1 \\ -x_1^2 + x_2 + x_3 = \mu \end{cases}$$

onde  $\mu$  é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial

o vector  $x^{(0)} = [c \ 0 \ 0]^T$ , onde  $c$  é um certo número real, para obter a aproximação  $x^{(1)}$  somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.
- b) Factorize a matriz pelo método de Doolittle e diga para que valores de  $c$  o sistema linear considerado tem solução única.
- c) No caso de  $c = 1$ , resolva o sistema pelo método de Doolittle e calcule  $x^{(1)}$  (primeira iterada do método de Newton).
- d) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de  $c$  está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

**5.38.** Resolva o sistema não linear

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 = 9 \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 = 4 \end{cases}$$

utilizando o método de Newton e partindo de aproximações iniciais  $x^{(0)} = [1.2 \ 2.5]^T$ ,  $[-2.0 \ 2.5]^T$  e  $[2.0 \ -2.5]^T$ . Investigue a existência de outras soluções para o sistema.