INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Ano Lectivo: 2002/2003

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

4.1. Seja $A \in L^n$ uma matriz simétrica e sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ os valores próprios de A. Define-se o *quociente de Rayleigh* $\mathcal{R}(x)$ por

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Mostre que

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \mathcal{R}(x) = \lambda_1, \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \mathcal{R}(x) = \lambda_n.$$

4.2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 1 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Aplique o teorema de Gerschgorin para mostrar que os valores próprios de A são reais e localize intervalos que os contenham.

b) Justifique se a matriz é ou não invertível.

4.3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 1 \\ 8 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

a) Determine um majorante para $cond_*(A)$, baseado na localização dos valores próprios.

b) Supondo que ao resolver o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$ o vector $\tilde{b}$ vem afectado de um erro relativo $||\delta_{\tilde{b}}||_2 \leq 10^{-2}$, determine um majorante para $||\delta_{\tilde{x}}||_2$.

4.4. Pretende-se calcular o valor próprio dominante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9+\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

onde θ é uma constante real.

a) Localize os valores próprios e mostre que há um valor próprio dominante, e que os outros são reais.

b) Para $\theta = 0$, calcule as duas primeiras iteradas pelo método das potências, começando com $u^{(0)} = (1, 0, 0)$, e indique uma estimativa para o factor de convergência.

4.5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 - 2\cos\beta & \cos\beta \\ 1 & 25 & 5\sin\alpha \\ 1 & 5\sin\alpha + \sin\beta & 50 \end{bmatrix},$$

onde α e β são constantes reais.

a) Localize os valores próprios de A usando o teorema de Gerschgorin.

b) Indique os valores de β para os quais podemos obter uma decomposição $A = LL^T$, em que L é uma matriz triangular inferior real.

c) Para que valores de $b \in \mathbb{R}^3$ é possível utilizar o método de Jacobi para resolver um sistema $Ax = b$? Indique uma estimativa de erro para $||e^{(n)}||_\infty$ em função de $||b||_\infty$, considerando $x^{(0)} = 0$.

4.6. a) Dado um polinómio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

e uma matriz $A \in L^n$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

mostre que $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. A matriz A diz-se *a matriz companheira* do polinómio p.

b) Mostre que qualquer raiz z do polinómio p satisfaz a

$$|z| \leq 1 \qquad \text{ou} \qquad |z + a_{n-1}| \leq |a_0| + \cdots |a_{n-2}|.$$

Mostre que são também válidas as seguintes estimativas:

$$|z| \leq |a_0| \qquad \text{ou} \qquad |z| \leq 1 + |a_j|, \quad j = 1, \ldots, n-2 \qquad \text{ou} \qquad |z + a_{n-1}| \leq 1.$$

c) Localize as raízes das seguintes equações:

(i) $x^{10} + 8x^9 + 1 = 0$.

(ii) $x^6 - 4x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$.

4.7. Considere a matriz companheira do polinómio com coeficientes reais

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

a) Mostre que se $|a_{n-1}| > 1 + M$, com $M = \max\{|a_0|, |a_1| + 1, ..., |a_{n-2}| + 1\}$, então existe uma e uma só raiz real dominante em $[-a_{n-1} - 1, -a_{n-1} + 1]$, e as restantes raízes encontram-se na bola $\{|z| \leq M\}$.

b) Considere o polinómio

$$p(x) = 2 - 6x^2 + 4x^3 - 16x^4 + 2x^5.$$

Localize a raíz dominante num intervalo de comprimento 2 e as restantes raízes numa bola de raio 1. Determine aproximadamente a raiz dominante usando duas iterações do método das potências.