INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Ano Lectivo: 2002/2003

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

3.1. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 10^{-6} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

a) Resolva o sistema pelo método da eliminação de Gauss.

b) Suponha que o sistema é resolvido numa calculadora onde os números são representados num sistema de vírgula flutuante, apenas com 6 dígitos na mantissa. Que solução obteria nesse caso? Compare com a solução exacta.

c) Suponha que o sistema é resolvido na mesma máquina, mas usando *pesquisa parcial de pivot*. Qual é o resultado nestas condições? Compare com o resultado da alínea anterior e comente.

3.2. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 10^{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \times 10^{6} \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique que este sistema é equivalente ao do exercício anterior.

b) Será que, neste caso, a pesquisa parcial de pivot permite superar os efeitos dos erros de arredondamento, como acontecia no exercício anterior? Justifique.

c) Resolva o sistema, utilizando os métodos da pesquisa total de pivot. Comente.

3.3. Devido ao uso de aritmética não exacta, o método de eliminação de Gauss pode conduzir a soluções totalmente erradas. Como exemplo, considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 0.003000 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{bmatrix},$$

com solução exacta $x = 10.00$ e $y = 1.000$. Suponha que efectua os cáculos no sistema VF(10, 4, -10, 10), com arredondamento simétrico. Compare os resultados obtidos pelo método de eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot.

3.4. Considere os seguintes dois sistemas de equações equivalentes:

$$\begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 20000 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Supondo que efectua os cáculos no sistema decimal com 4 dígitos, analise as vantagens da selecção de pivot na resolução de cada um dos sistemas. Qual o tipo de selecção que deveria utilizar em cada um dos casos?

3.5. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Representando os números com seis dígitos na mantissa, resolva este sistema pelo método da eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot. Compare os resultados e comente.

3.6. Considere uma matriz $A \in L^n$, tridiagonal, isto é tal que os seus elementos satisfazem a $a_{ij} = 0$, se $|i-j| > 1$. Mostre que as matrizes L e U da sua factorização pelo métodos de Doolittle ou Crout satisfazem as condições

$$\begin{aligned} l_{ij} &= 0, \qquad se \quad i < j \quad ou \quad i > j+1; \\ u_{ij} &= 0, \qquad se \quad i > j \quad ou \quad i < j-1. \end{aligned}$$

3.7. Seja $A \in L^n$ uma matriz tridiagonal. Suponha que A admite uma factorização triangular $A = LU$.

a) Mostre que a factorização de Crout de A pode ser calculada pelas fórmulas

$$\begin{cases} l_{11} = a_{11}, & \\ l_{i,i-1} = a_{i,i-1}, & i = 2, \ldots, n, \\ l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1} u_{i-1,i}, & i = 2, \ldots, n, \\ l_{ij} = 0, & \text{se } i < j \text{ ou } i > j+1; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{ii} = 1, & i = 1, \ldots, n, \\ u_{i-1,i} = \dfrac{a_{i-1,i}}{l_{i-1,i-1}}, & i = 2, \ldots, n, \\ u_{ij} = 0, & \text{se } i > j \text{ ou } i < j-1. \end{cases}$$

b) Prove que neste caso é preciso efectuar apenas $8n - 7$ operações aritméticas para resolver o sistema $Ax = b$.

c) Calcule a factorização de Crout da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.8. Seja $A \in L^n$ uma matriz tridiagonal tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique que $\det A = n+1$.

b) Obtenha a factorização de Crout de A.

c) Resolva o sistema $Ax = b$, em que $b = [0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1]^T \in \mathbb{R}^n$.

d) Calcule o número de condição de A, para $n = 6, 10, 14$.

3.9. Seja $A \in L^n$ uma matriz simétrica e definida positiva. Mostre que

a) A é não singular;

b) $a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$;

c) $\max\limits_{1 \le k,j \le n} |a_{kj}| \le \max\limits_{1 \le i \le n} |a_{ii}|$;

d) $a_{ij}^2 < a_{ii}\, a_{jj} \quad \forall i \ne j$.

3.10. Seja $A \in L^n$ uma matriz simétrica e suponha que todos os seus menores principais A_k, $k = 1, \ldots, n$, são não-singulares. Neste caso existe uma e uma só decomposição $A = LDL^T$, onde $L \in L^n$ é triangular inferior de diagonal principal unitária e $D \in L^n$ é uma matriz diagonal.

a) Mostre que a factorização LDL^T de A é obtida pelas fórmulas

$$\begin{cases} d_{11} = a_{11}, & \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{d_{11}}, & i = 2, \ldots, n, \\ d_{ii} = a_{ii} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_{kk}, & i = 2, \ldots, n, \\ l_{ij} = \dfrac{1}{d_{jj}} \left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} d_{kk} \right), & \begin{array}{l} j = 2, \ldots, n-1, \\ i = j+1, \ldots, n. \end{array} \end{cases}$$

b) Mostre que A é definida positiva se e só se $d_{ii} > 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

c) Calcule a factorização LDL^T da matriz de Hilbert (de ordem 3)

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

d) Obtenha a factorização de Cholesky de H_3.

3.11. Considere a matriz quadrada de ordem n com a forma geral

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Obtenha a forma geral da factorização de Crout desta matriz.

b) Com base na factorização obtida, calcule $\det A$.

c) Resolva o sistema $Ax = b$, onde $b = [0 \;\; 0 \cdots 0 \;\; 1]^T$.

d) Prove que esta matriz é definida positiva e determine a sua factorização de Cholesky.

3.12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Resolva o sistema $Ax = b$ com $b = [1 \;\; 0 \;\; 0]^T$ e com $b = [0 \;\; 0 \;\; -2]^T$.

b) Obtenha a decomposição de Cholesky da matriz A.

3.13. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

a) Deduza a decomposição de Cholesky da matriz A.

b) Resolva o sistema $Ax = b$ com $b = [1 \;\; 0 \;\; 0]^T$.

3.14. Pretende-se resolver um sistema linear $Ax = b$ em que os elementos da matriz A são definidos da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{M}{C^i + C^j}, & \text{se} \quad i \neq j, \\[2mm] \dfrac{C\,|M|}{C-1}, & \text{se} \quad i = j, \end{cases}$$

em que $C > 1$, $M \neq 0$.

a) Mostre que a matriz é definida positiva e conclua que é possível decompô-la na forma $A = LL^T$.

b) Considere uma matriz 3×3, com $M = 16, C = 2$. Determine a inversa, usando o método de Cholesky.

3.15. A matriz $A \in L^n$ diz-se *estritamente diagonal dominante* (por linhas) se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Mostre que uma matriz estritamente diagonal dominante é não-singular.

3.16. Seja $A \in L^n$ uma matriz triangular inferior, não singular. Pretende-se resolver um certo sistema $Ax = b$, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.

a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações . Justifique e diga quantas.

b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

3.17. Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ se e só se $|\rho| < 1$, onde $\rho = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

b) Suponha que para ambos os métodos, a convergência está garantida e que existe o limite

$$c_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{\|e^{(k+1)}\|_1}{\|e^{(k)}\|_1}.$$

Determine c_1 para cada um dos métodos.

c) Nas condições da alínea b), partindo de uma aproximação inicial arbitrária $x^{(0)}$, quantas iterações é necessário efectuar (utilizando cada um dos métodos) para obter uma aproximação $x^{(k)}$, tal que $\|e^{(k)}\| \leq \varepsilon$?

d) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante, por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

onde x é a solução do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max\left(\dfrac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \dfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right)$.

e) Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [2 \;\; 1]^T$. Com base na alínea d) determine um majorante do erro do resultado obtido.

3.18. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

b) Mostre que, caso utilizar o método de Gauss-Seidel, a convergência depende da aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial (diferente da solução exacta) para a qual o método é convergente e uma aproximação inicial para a qual o método é divergente.

3.19. Seja $A \in L^n$ uma matriz simétrica e definida positiva.

a) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

b) Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que embora A seja simétrica e definida positiva, o método de Jacobi não converge.

c) Mostre que se, além de $A \in L^n$ ser simétrica e definida positiva, também a matriz $2D - A$, onde $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ é definida positiva, então o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

3.20. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 + \cos\theta \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema $Ax = b$ (com $b \in \mathbb{R}^3$ qualquer), dado $x^{(0)} = [0 \;\; -212 \;\; 10^5]^T$.

b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, efectuando a primeira iteração com $x^{(0)} = [10^5 \;\; 10^6 \;\; 0]^T$.

c) Ao fim de quantas iterações n é possível garantir um erro $\|e_n\|_\infty \leq 10^{-6}$.

3.21. Considere as matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\beta & -\alpha \\ \beta & -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

onde $0 < \beta < \alpha$.

a) Mostre que, qualquer que seja a iterada inicial, o método de Jacobi converge e o de Gauss-Seidel não converge para a solução de um sistema $Ax = b$.

b) Considere $\beta = 1, \alpha = 2$, e $b = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$. A solução única do sistema $Ax = b$ será $x = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$.

(i) Mostre que se começar com $x^{(0)} = [0 \;\; 2 \;\; 1]^T$ ou outro vector qualquer, ao fim de três iterações obtemos a solução exacta pelo método de Jacobi. (Verifique que o raio espectral da matriz C associada ao método de Jacobi é 0).

(ii) Mostre que se começar com $x^{(0)} = [1 \;\; 2 \;\; 1]^T$, aplicando o método de Gauss-Seidel, obtém $x^{(2)} = x^{(1)} = [0 \;\; 2 \;\; 1]^T$. Verifique que esse vector é um vector próprio associado ao valor próprio 1 da matriz C (do método de Gauss-Seidel) e não é solução do sistema.

3.22. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \\ 10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4ª iterada. Considere $x^{(0)} = [-4 \;\; -4 \;\; -4]^T$.

c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $x^{(k)}$.

3.23. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

b) Escreva o sistema na forma iterativa e determine 4 iteradas do método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

3.24. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo da forma

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Identifique a matriz B e o vector c. Se $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(k)}$.

3.25. Pretende-se determinar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 2^n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n \\ 2^{n-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema.

b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, assumindo que $e^{(0)} = [-1 \;\; 2^n \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0]^T$.

c) Comente quanto à rapidez de convergência quando $n \to \infty$.

3.26. Seja A uma matriz real quadrada, de ordem 2, tal que os seus valores próprios são complexos:

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib.$$

Considerando a solução de um sistema linear com a matriz A, pelo método da iteração simples, determine:

a) o intervalo de valores de ω, para os quais está garantida a convergência do método;

b) o valor ω_{opt}, para o qual se obtém, em princípio, a maior rapidez de convergência, e o valor correspondente do raio espectral de $C(\omega)$.

3.27. Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Sabendo que os valores próprios de A satisfazem $\lambda_i \in [5-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3}], i = 1, \ldots, 5$, determine os valores de ω para os quais o método iterativo

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega(Ax^{(k)} - b), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

converge para x qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}$.

b) Seja $\omega = 0.2$. Partindo de $x^{(0)} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$, calcule as três primeiras iteradas pelo método da alínea a). Estime o erro da iterada $x^{(3)}$ na norma $\| \cdot \|_\infty$.

3.28. Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2\omega \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que tanto o método iterativo de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem para a solução deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, se e só se $|\omega| < \frac{4}{3}$. Prove também que o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente, desde que $\omega \neq 0$. Como é que os dois métodos convergem quando $\omega = 0$?

b) Seja $\omega = \frac{1}{2}$ e $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$. Calcule as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^{(3)}\|_\infty$.

c) Determine os valores de ω para os quais a matriz A é definida positiva.

3.29. O sistema de equações lineares,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} x = b$$

pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} x^{(k)} + \omega b$$

a) Para que valores de a o método converge se $\omega = 1$?

b) Será que o o método converge para $a = -\frac{1}{2}$ e $\omega = \frac{1}{2}$?

3.30. a) Mostre que a condição $\omega \in (0,2)$ é necessária para que o método das relaxações sucessivas convirja para a solução do sistema $Ax = b$.

b) Prove que, se $A \in L^n$ for simétrica e definida positiva, então a condição $\omega \in (0,2)$ é suficiente.

3.31. Seja $A \in L^n$ uma matriz não-singular e seja $C \in L^n$ uma aproximação de A^{-1}. Considere o seguinte método iterativo para a resolução numérica do sistema linear $Ax = b$, conhecido por *método de correcção residual*:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + Cr^{(k)}, & k = 0, 1, \ldots \\ r^{(k)} = b - Ax^{(k)}, & k = 0, 1, \ldots \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

a) Mostre que se $\|I - CA\| < 1$, então o método converge para x qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

b) Seja $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon B$, com

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $0 < \varepsilon \ll 1$. Aproxime a solução do sistema $A(\varepsilon)x = b$, com $b = [1\ 1\ 1]^T$ e $\varepsilon = 10^{-4}$ pelo método de correcção residual com um erro inferior a 10^{-5}. Tome $C = A_0^{-1}$, isto é,

$$C = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$