INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Ano Lectivo: 2002/2003

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

2.1. Seja $x \in \mathbb{C}^n$. Mostre que

a) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$;

b) $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$;

c) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

2.2. Sejam $p, q \in]1, \infty[$ expoentes conjugados, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a) Demonstre a desigualdade de Young,

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \forall\, a, b \ge 0.$$

b) Demonstre a desigualdade de Hölder,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\Big)^{1/q}, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n.$$

c) Mostre que a *p-norma*

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty,$$

satisfaz a desigualdade de Minkowski (desigualdade triangular)

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p, \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

2.3. Seja N uma norma num espaço vectorial E. Mostre que

$$\|x - y\|_N \ \ge\ |\|x\|_N - \|y\|_N|, \qquad \forall x, y \in E.$$

2.4. Seja $A \in L^n$. Supondo que são conhecidos os valores próprios de A, determine:

a) os valores próprios de A^{-1} (admitindo que A é invertível);

b) os valores próprios de A^m, $m = 1, 2, \ldots$;

c) os valores próprios de $A + c\,I$, onde c é uma constante.

2.5. Seja $A \in L^n$ e $B = A^* A$. Mostre que:

a) B é hermitiana;

b) todos os valores próprios de B são não negativos;

c) se A é não singular então B é uma matriz definida positiva.

2.6. Considere no espaço L^n a norma de Frobenius, definida para qualquer $A = (a_{ij}) \in L^n$ por

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Mostre que:

a) se $A, B \in L^n$ então

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F;$$

b) se $A \in L^n$ e $x \in \mathbb{C}^n$ então

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2;$$

c) se $A, U \in L^n$ e U é unitária então

$$\|AU\|_F = \|UA\|_F = \|A\|_F;$$

d) se $A \in L^n$ é hermitiana então

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2},$$

onde λ_i, $i = 1, \ldots, n$, são os valores próprios de A;

e) se $A \in L^n$ é hermitiana então

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F.$$

2.7. Seja M uma norma matricial associada a uma certa norma vectorial V. Mostre que:

a) $\|I\|_M = 1$, onde I é a matriz identidade;

b) se A é invertível, então

$$\|A^{-1}\|_M \geq \frac{1}{\|A\|_M}.$$

2.8. Mostre que a norma de Frobenius não está associada a nenhuma norma vectorial.

2.9. Sejam $A, U \in L^n$. Mostre que:

a) Se A é hermiteana, então $\|A\|_2 = r_\sigma(A)$.

b) Se U é unitária, então $\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2$.

2.10. Seja $Q \in L^n$ uma matriz não singular.

a) Mostre que a função $V(x) = \|Q^{-1}x\|_\infty$ define uma norma no espaço vectorial $\mathbb{C}^n$.

b) Verifique que a norma matricial M associada à norma V da alínea a) tem a seguinte expressão :

$$\|A\|_M = \|Q^{-1}\, A\, Q\|_\infty$$

2.11. Seja $A \in L^n$ uma matriz tal que $\|A\| < 1$. Prove que a matriz $I - A$ é não singular e que

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}\,.$$

2.12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

e o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \;\; 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1 \;\; 1]^T$.

a) Determine $cond_\infty(A)$.

b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1+\epsilon \;\; 10^{-6}]^T$. Obtenha

$$\|\delta_b\|_\infty = \frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \text{e} \qquad \|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1 \;\; 2\times 10^{-6}]^T$. Obtenha

$$\|\delta_b\|_\infty = \frac{\|b-\bar{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \text{e} \qquad \|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x-\bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

2.13. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine $cond_1(A)$.

b) Ao resolver um sistema $Ax = b$ com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta_b\|_1 \leq \varepsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução, $\|\delta_x\|_1$.

2.14. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & 0 & -\frac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{1+a^2} & 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}.$$

b) Calcule $cond_\infty(A)$ e $cond_1(A)$.

c) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ há mau condicionamento da matriz? E se considerar $a \in \mathbb{C}$?

2.15. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Suponha que ao resolver o sistema $A\,x = b$, com um certo valor de a, obteve a solução $\tilde{x} = (1, 1, 1)$. Supondo que o valor de a está afectado de um certo erro, de valor absoluto não superior a ε, determine um majorante de $\|\Delta x\|_\infty$, onde Δx é a diferença entre a solução obtida e a que se obteria se fosse conhecido o valor exacto de a.

2.16. Considere um sistema $Ax = b$ em que o segundo membro é dado com um erro relativo $\|\delta_b\|_1 < 0.1$. Sabendo que a matriz é simétrica e que $\|A\|_\infty \le 7$, $\|A^{-1}\|_1 \le 1$, determine um majorante para $\|\delta_x\|_\infty$.

2.17. Seja $A \in L^n$ uma matriz com a forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule A^{-1}.

b) Determine $cond_1(A)$ e $cond_\infty(A)$.

c) Sejam b_1 e b_2 dois vectores de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \le 10^{-5}.$$

Sendo x_1 e x_2 as soluções dos sistemas $A\,x = b_1$ e $A\,x = b_2$, respectivamente, determine um majorante de

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$

no caso de $n = 20$. Comente.

2.18. Seja $A \in L^n$ uma matriz com a forma

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule $\|A\|_\infty$ e $\|A\|_1$.

b) Sabendo que a inversa de A é uma matriz idêntica a A mas com valores $b' = 1/b$, $a' = -a/b$, calcule os números de condição da matriz A com as normas $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ e com o raio espectral. Comente.

c) Considere o sistema $Ax = y$. Dado um vector $\tilde{y}$ aproximado de y, com $\|y\|_\infty = 10$, a menos de 10^{-4}, em cada uma das componentes, apresente uma estimativa para um majorante do erro relativo da solução $\tilde{x}$.

d) Seja $a = 1$, $b = 1$, $n < \alpha 10^m$, com $\alpha < 1$. Supondo que $\tilde{A}$ é uma perturbação da matriz A por adição de 10^{-2m} nos seus elementos, determine o mesmo que na alínea c).

2.19. **a)** Sendo $A, X \in L^n$, A não singular, mostre que

$$\|I - XA\| \leq \mathit{cond}(A)\, \|I - AX\|.$$

b) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8.9999 \end{bmatrix}$$

e a seguinte aproximação para a matriz inversa A^{-1}

$$X = \begin{bmatrix} -10067.2 & 20099.9 & -9952.58 \\ 20132.3 & -40198.9 & 19905.2 \\ -10065.5 & 20099.3 & -9952.58 \end{bmatrix}.$$

Calcule $I - AX$ e $I - XA$. Obtenha uma estimativa para $\mathit{cond}_1(A)$.