INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Ano Lectivo: 2002/2003

ANÁLISE NUMÉRICA

<u>Exame de 15 de Julho de 2003</u>

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x), \tag{S}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 - 3x_2 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 3x_3 - 1 \end{bmatrix}, \qquad g(x) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

(a)[20] Mostre que o sistema (S) tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

(b)[20] Obtenha um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução única z do sistema (S) usando duas iteradas do método do ponto fixo partindo da condição inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_\infty$.

(c)[20] Mostre que a determinação de um valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$ para a solução z do sistema (S) usando uma iterada do método da Newton generalizado partindo da aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)} = [\alpha\ \alpha\ 0]^T$, onde α é uma constante real, conduz à resolução de um sistema linear $Ay = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & -3 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3\alpha - \alpha^2 \\ 3\alpha - \alpha^2 \\ 1 - 2\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

(d)[20] Tomando $\alpha = 1$, resolva o sistema $Ay = b$ da alínea anterior pelo método de Crout e conclua a determinação do valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$.

[2] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0	1	2	1	0

(a)[20] Determine o polinómio p de menor grau que interpola f nos pontos da tabela.

(b)[20] Supondo que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \left| f^{(r)}(x) \right| \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^r, \qquad \forall r \in \mathbb{N},$$

apresente um majorante para o erro absoluto que se comete ao aproximar o valor de $f(x)$ pelo valor de $p(x)$ válido para todos os pontos $x \in [-2, 2]$.

(c)[20] Determine a melhor aproximação de f no sentido dos mínimos quadrados por um polinómio da forma

$$q(x) = a_0 + a_2 x^2.$$

(d)[20] Calcule o valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)\, dx,$$

usando os pontos da tabela e a fórmula de Simpson composta com quatro subintervalos de igual comprimento.

[3] Considere o sistemas de duas equações diferenciais não-lineares de $1^{\underline{a}}$ ordem:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)(1 - z(x)), \\ z'(x) = z(x)(y(x) - 1), \qquad x \geq 0, \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais

$$\begin{cases} y(0) = \alpha, \\ z(0) = \beta, \qquad \alpha, \beta \in (0, \infty), \quad |\alpha - 1| + |\beta - 1| \neq 0. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados (y_1, z_1) para $(y(h), z(h))$, onde $h > 0$ é o passo de integração.

(a)[10] pelo método de Euler;

(b)[10] pelo método de Heun.

Nota. Os resultados vêm expressos em termos de α, β, h.

[4][20] Considere o problema de valor inical

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \qquad x \geq 0, \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função indefinidamente diferenciável e $\alpha \in \mathbb{R}$. Demonstre que o método de Heun para obter uma solução aproximada para este problema tem ordem de consistência dois.

$\boxed{\text{15.JUL.2003}}$