INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Ano Lectivo: 2002/2003

ANÁLISE NUMÉRICA

Exame de 26 de Junho de 2003

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1][20] Determine o erro relativo que se comete ao calcular o valor de $z = g(g(x))$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínuamente diferenciável, expresso em termos do erro relativo do valor de x e dos erros relativos de arredondamento no cálculo dos valores da função g.

[2] Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0, \qquad \det A \neq 0.$$

(a)[20] Obtenha as seguintes factorizações da matriz A:

$$A = L_1 U = L_1 D U_1 = L U_1,$$

onde D é uma matriz diagonal, L e L_1 são matrizes triangulares inferiores, tendo L_1 a diagonal principal unitária, e U e U_1 são matrizes triangulares superiores, tendo U_1 a diagonal principal unitária.

(b)[15] Sendo $b = c$, $a > 0$, $\det A > 0$, obtenha a factorização de Cholesky de A. Pode utilizar o resultado obtido na alínea (a).

(c)[20] Suponha que utiliza o método da iteração simples,

$$x_{n+1} = x_n + \omega(v - Ax_n), \qquad n \geq 0, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

para resolver o sistema $Ax = v$, $x, v \in \mathbb{R}^2$, v dado, no caso em que A tem valores próprios complexos conjugados, $\alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Determine o intervalo de valores do parâmetro ω para os quais está garantida a convergência do método.

[3] Considere a função

$$g_\mu : [0, \pi] \to [0, \pi], \qquad g_\mu(x) = \mu \sin(x), \qquad \frac{\pi}{2} < \mu < \pi.$$

(a)[10] Mostre que g_μ tem um único ponto fixo $z_\mu \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(b)[15] Mostre que existe um único valor de μ, μ_m, tal que a sucessão

$$x_{n+1} = g_\mu(x_n), \qquad n \geq 0,$$

converge pelo menos localmente para z_μ para $\mu < \mu_m$ e não converge para $\mu > \mu_m$.

(c)[20] Determine o valor de z_{μ_m} com um erro inferior a 10^{-2} usando o método de Newton. Caso não tenha feito a alínea anterior determine a raiz da equação

$$z + \tan(z) = 0,$$

no intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, com a precisão e pelo método indicados.

[4][20] Determine a melhor aproximação mínimos quadrados da função

$$f_\alpha : [0, \infty[\to [0, \infty[, \qquad f_\alpha(x) = x^\alpha, \qquad \alpha \geq 0,$$

no subespaço $\mathcal{P}_1$ dos polinómios de grau menor ou igual a um com respeito ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(x) g(x)\, dx, \qquad f, g \in C([0,2]).$$

[5][20] Demonstre a expressão do erro para o método dos trapézios:

$$E_1(f) = I(f) - I_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b), \qquad f \in C^2([a,b]).$$

[6][20] Obtenha a fórmula de quadratura de Gauss com dois nós de integração para aproximar o integral

$$I(f) = \int_0^2 f(x)\, dx, \qquad f \in C([0,2]).$$

[7][20] Determine a expressão geral dos métodos multipasso lineares da forma

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_2 y_{n-2} + h \left[b_0 f(x_n, y_n) + b_2 f(x_{n-2}, y_{n-2}) \right], \qquad n \geq 2,$$

com ordem de consistência dois. Analise a convergência dos métodos assim obtidos.