INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Ano Lectivo: 2010/2011 **Semestre: 2º**

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Teste de 25 de Maio de 2011

Duração: 2 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares $x = g(x)$, onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 + 2e^{-x_2} \\ 1 + e^{-x_1} \end{bmatrix}.$$

(a)[10] Mostre que o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = [1, 2] \times [1, 2]\,.$$

(b)[15] Calcule um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução z usando duas iteradas do método do ponto fixo com função iteradora g e condição inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1]^T$ e obtenha uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_1$.

[2][15] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Suponha que utiliza o método iterativo

$$(1 + \omega)Px^{(k+1)} = (\omega P + Q)x^{(k)} + b,$$

para obter uma solução aproximada do sistema linear, onde $\omega > -1$, $P - Q = A$, $P^{-1}Q$ é não singular e tem valores próprios reais $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1$. Determine:

(i) o intervalo de valores de ω para os quais o método converge para a solução do sistema linear para qualquer condição inicial;

(ii) o valor de ω para o qual o método converge mais rapidamente.

[3] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f definida e contínua em $\mathbb{R}$:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0	c	1	c	0

onde c é uma constante positiva.

(a)[15] Determine o polinómio interpolador de f nos pontos da tabela usando a fórmula de Newton às diferenças divididas.

(b)[10] Sabendo que $\max_{x\in[-2,2]} \left|f^{(5)}(x)\right| = \left(\frac{\pi}{4}\right)^5$ determine o menor majorante do valor absoluto do erro de interpolação válido para qualquer $x \in [-2, 2]$.

(c)[15] Determine os valores das constantes a e b que minimizam a soma

$$S(a, b) = \sum_{i=0}^{4} \left[f(x_i) - a - bx_i^2\right]^2 .$$

(d)[15] Calcule valores aproximados do integral

$$I = \int_{-2}^{2} e^{f(x)}\, dx,$$

usando:

(i) a fórmula de Simpson composta com 4 subintervalos;

(ii) a fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 4.

[4][15] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) + xy(x) = 0, & x \geq x_0, \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0. \end{cases}$$

onde x_0, y_0, z_0 são constantes reais com $y_0^2 + z_0^2 > 0$. Calcule valores aproximados y_1 e z_1 para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$, respectivamente, usando o método de Heun com passo $h > 0$.

[5][10] Seja $Y : [x_0, b] \to \mathbb{R}$ a solução do problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y(x)), x \in [x_0, b], y(x_0) = Y_0$, onde f é uma função continuamente diferenciável em $[x_0, b] \times \mathbb{R}$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq L, \forall (x, y) \in [x_0, b] \times \mathbb{R}$. Seja $\{y_n\}_{0\leq n\leq N}$ a solução aproximada do problema obtida pelo método de Euler com passo h. Demonstre que o erro de discretização global $e_n(h) = Y(x_n) - y_n$ satisfaz à desigualdade

$$|e_n(h)| \leq e^{L(x_n - x_0)}|e_0(h)| + \frac{\tau(h)}{L}\left[e^{L(x_n - x_0)} - 1\right], \qquad 0 \leq n \leq N(h),$$

onde $\tau(h) = \frac{h}{2} \max_{x\in[x_0,b]} |Y''(x)|$ e $hN(h) = b - x_0$. Nota: Pode usar o seguinte resultado: sendo $\{e_n\}$ uma sucessão de números reais, se $|e_{n+1}| \leq (1 + A)|e_n| + B, n \geq 0$, onde $A > 0, B \geq 0$, então $|e_n| \leq |e_0|e^{nA} + \frac{B}{A}\left(e^{nA} - 1\right), n \geq 0$.