INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Ano Lectivo: 2010/2011

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Resolução do Teste de 25 de Maio de 2011

[1]

(a)[10]

O teorema do ponto fixo diz-nos que g terá um e um só ponto fixo em D se forem satisfeitas as seguintes condições:

- $g(D) \subset D$ • $g \in C^1(D)$ • $\sup_{x \in D} \|J_g(x)\|_1 < 1$

Verifiquemos pois estas condições:

- $$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x) \in [1 + 2e^{-2},\ 1 + 2e^{-1}] \subset [1,2]\,, \quad \forall x \in D \\ \\ g_2(x) \in [1 + e^{-2},\ 1 + e^{-1}] \subset [1,2]\,, \quad \forall x \in D \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad g(D) \subset D$$

- g_1 e g_2 são infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e portanto em D.

- $J_g(x) = \begin{bmatrix} 0 & -2e^{-x_2} \\ -e^{-x_1} & 0 \end{bmatrix}$

$$\|J_g(x)\|_1 = \sup_{x \in D} \left\{ 2e^{-x_2},\ e^{-x_1} \right\} \leq \frac{2}{e} < 1, \quad \forall x \in D$$

Concluímos que g tem um único ponto fixo z em D e, portanto, que o sistema de equações $x = g(x)$ tem uma única solução em D.

(b)[15]

$$x^{(m+1)} = g\left(x^{(m)}\right), \quad m \geq 0$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x^{(1)} = g\left(x^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 1 + 2e^{-1} \\ 1 + e^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.73576 \\ 1.36788 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = g\left(x^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 1 + 2e^{-1-e^{-1}} \\ 1 + e^{-1-2e^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.50929 \\ 1.17627 \end{bmatrix}$$

$$\|z - x^{(2)}\|_1 \leq \frac{L}{1-L} \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_1$$

$$x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2e^{-1}\left(e^{-e^{-1}} - 1\right) \\ e^{-1}\left(e^{-2e^{-1}} - 1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.226466 \\ -0.191613 \end{bmatrix}$$

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_1 = e^{-1}\left(3 - 2e^{-e^{-1}} - e^{-2e^{-1}}\right) = 0.418079$$

$$\sup_{x\in D} \|J_g(x)\|_1 \leq \frac{2}{e} = 0.735759 = L$$

$$\|z - x^{(2)}\|_1 \leq \frac{2e^{-2}}{1-2e^{-1}}\left(3 - 2e^{-e^{-1}} - e^{-2e^{-1}}\right) = 1.16411$$

[2][15]

Método iterativo com

$$M = (1+\omega)P, \quad N = -\omega P - Q, \quad M + N = P - Q = A$$

Matriz iteradora do método:

$$C(\omega) = -M^{-1}N = \frac{P^{-1}(\omega P + Q)}{1+\omega} = \frac{P^{-1}Q + \omega I}{1+\omega} = \frac{C(0) + \omega I}{1+\omega}$$

Raio espectral de $C(\omega)$:

$$\det\left[C(\omega) - \mu I\right] = (1+\omega)^{-n} \det\left[C(0) - ((1+\omega)\mu - \omega)\, I\right] = 0$$

$$\lambda_i = (1+\omega)\mu_i - \omega \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_i = \frac{\omega + \lambda_i}{1+\omega}$$

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_i \leq \cdots \leq \lambda_n < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -\lambda_1 \geq \cdots \geq -\lambda_i \geq \cdots \geq -\lambda_n > -1$$

$$r_\sigma(C(\omega)) = \begin{cases} -\mu_1, & -1 < \omega \leq \omega_{\text{opt}}, \\ \mu_n, & \omega_{\text{opt}} \leq \omega, \end{cases} \qquad \omega_{\text{opt}} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}$$

(i) $\omega \in]\omega_{\text{inf}}, \infty[, \quad \omega_{\text{inf}} = -\dfrac{1+\lambda_1}{2},$ intervalo onde $r_\sigma(C(\omega)) < 1$.
ω_{inf} é o valor de ω para o qual $-\mu_1 = 1$

(ii) $\omega = \omega_{\text{opt}}$, valor para o qual $r_\sigma(C(\omega))$ é mínimo.

[3]

(a)[15]

Fórmula de Newton às diferenças divididas:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	-2	0				
			c			
1	-1	c		$\frac{1-2c}{2}$		
			1-c		$\frac{4c-3}{6}$	
2	0	1		$c-1$		$\frac{3-4c}{12}$
			c-1		$\frac{3-4c}{6}$	
3	1	c		$\frac{1-2c}{2}$		
			-c			
4	2	0				

$$
\begin{aligned}
p_4(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_4(x) &= c(x+2) + \frac{1-2c}{2}(x+2)(x+1) \\
&\quad + \frac{4c-3}{6}(x+2)(x+1)x + \frac{3-4c}{12}(x+2)(x+1)x(x-1)
\end{aligned}
$$

$$
p_4(x) = \frac{1}{4}(4-x^2)\left(1 + \frac{4c-3}{3}\,x^2\right)
$$

(b)[10]

$$
e_4(x) = f(x) - p_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,W_5(x), \qquad x \in [-2,2]
$$

$$
W_5(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2), \qquad \xi \in]-2;2;x[\subset [-2,2]
$$

$$
|e_4(x)| \leq \frac{1}{120} \max_{x\in[-2,-2]} \left|f^{(5)}(x)\right| \max_{x\in[-2,2]} |W_5(x)|, \qquad \forall x \in [-2,2]
$$

$$
\max_{x\in[-2,-2]} \left|f^{(5)}(x)\right| = \left(\frac{\pi}{4}\right)^5
$$

$$
W_5(x) = x^5 - 5x^3 + 4x
$$

$$
W_5'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4 = 5(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)
$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} = 0.543912, \qquad \beta = \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} = 1.64443$$

$$W_5(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{50}(1+\sqrt{145})\sqrt{15-\sqrt{145}} = 1.41870$$

$$W_5(\beta) = \frac{\sqrt{10}}{50}(1-\sqrt{145})\sqrt{15+\sqrt{145}} = -3.63143$$

$$\max_{x\in[-2,-2]} |W_5(x)| = \max\{|W_5(\alpha)|, |W_5(\beta)|\} = |W_5(\beta)|$$

$$|e_4(x)| \leq \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 |W_5(\beta)| = 0.00904369, \quad \forall x \in [-2,2]$$

(c)[15]

Melhor aproximação mínimos quadrados:

$$\phi^*(x) = a^*\phi_0(x) + b^*\phi_1(x), \qquad \phi_0(x) = 1, \qquad \phi_1(x) = x^2$$

$$\begin{bmatrix} \langle\bar\phi_0,\bar\phi_0\rangle & \langle\bar\phi_0,\bar\phi_1\rangle \\ \langle\bar\phi_1,\bar\phi_0\rangle & \langle\bar\phi_1,\bar\phi_1\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\bar f,\bar\phi_0\rangle \\ \langle\bar f,\bar\phi_1\rangle \end{bmatrix}, \qquad \langle\bar\phi,\bar\psi\rangle = \sum_{i=1}^{4} \bar\phi_i\bar\psi_i$$

$$\bar\phi_0 = [\phi_0(x_i)] = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \quad \bar\phi_1 = [\phi_1(x_i)] = \begin{bmatrix} 4\\1\\0\\1\\4 \end{bmatrix}, \quad \bar f = [f(x_i)] = \begin{bmatrix} 0\\c\\1\\c\\0 \end{bmatrix}$$

$$\langle\bar\phi_0,\bar\phi_0\rangle = 5$$

$$\langle\bar\phi_0,\bar\phi_1\rangle = 10 = \langle\bar\phi_1,\bar\phi_0\rangle$$

$$\langle\bar\phi_1,\bar\phi_1\rangle = 34$$

$$\langle\bar f,\bar\phi_0\rangle = 2c+1$$

$$\langle\bar f,\bar\phi_1\rangle = 2c$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c+1 \\ 2c \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 24c+17 \\ -5c-5 \end{bmatrix}$$

(d)[15]

(i) Fórmula de Simpson composta ($F \in C([a,b])$):

$$I(F) = \int_a^b F(x)\,dx \quad \approx$$

$$I_2^{(M)}(F) = \frac{h_M}{3}\left[F(X_0) + F(X_M) + 4\sum_{j=1}^{M/2} F(X_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{M/2-1} F(X_{2j})\right]$$

$$h_M = \frac{b-a}{M}, \qquad X_j = a + jh_M, \quad j = 0, 1, \ldots, M, \qquad M \ \text{par}$$

$$\begin{cases} a = -2, \quad b = 2, \qquad M = 4, \qquad h_M = 1 \\ X_j = -2 + j = x_j, \quad j = 0,1,2,3,4, \qquad F(X_j) = e^{f(x_j)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_2^{(4)}(F) &= \frac{1}{3}\,[F(-2) + 4F(-1) + 2F(0) + 4F(1) + F(2)] \\ &= \frac{2}{3}\,(1 + e + 4e^c) \end{aligned}$$

(ii) Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 4 ($F \in C([a,b])$):

$$I(F) = \int_a^b F(x)\,dx \quad \approx$$

$$I_4(F) = \frac{b-a}{90}\left[7F(a) + 32F(a+h) + 12F\left(\frac{a+b}{2}\right) + 32F(b-h) + 7F(b)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{4}$$

$$a = -2, \quad b = 2, \qquad h = 1, \qquad F(x) = e^{f(x)}$$

$$\begin{aligned} I_4(F) &= \frac{2}{45}\,[7F(-2) + 32F(-1) + 12F(0) + 32F(1) + 7F(2)] \\ &= \frac{4}{45}\,(7 + 6e + 32e^c) \end{aligned}$$

[4][15]

$$W'(x) = F(x, W(x)), \qquad W = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}, \qquad F(x,W) = \begin{bmatrix} z \\ -xy \end{bmatrix}$$

Método de Heun (passo h):

$$W_1 = W_0 + \frac{h}{2}\left[F(x_0, W_0) + F\left(\tilde{x}_1, \tilde{W}_1\right)\right]$$

$$\tilde{x}_1 = x_0 + h, \qquad \tilde{W}_1 = W_0 + hF(x_0, W_0)$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \qquad F(x_0, W_0) = \begin{bmatrix} z_0 \\ -x_0 y_0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_0 \\ -x_0 y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + h z_0 \\ z_0 - h x_0 y_0 \end{bmatrix}$$

$$F\left(\tilde{x}_1, \tilde{W}_1\right) = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ -\tilde{x}_1 \tilde{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 - h x_0 y_0 \\ -(x_0 + h)(y_0 + h z_0) \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} z_0 + z_0 - h x_0 y_0 \\ -x_0 y_0 - (x_0 + h)(y_0 + h z_0) \end{bmatrix}$$

$$y_1 = y_0 + h z_0 - \frac{h^2}{2} x_0 y_0$$

$$z_1 = z_0 - h x_0 y_0 - \frac{h^2}{2}(y_0 + x_0 z_0) - \frac{h^3}{2} z_0$$

[5][10]

Método de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

Erro de discretização local:

$$\tau(x_n, Y(x_n), h) = \frac{Y(x_{n+1}) - Y(x_n)}{h} - f(x_n, Y(x_n)) = \frac{h}{2} Y''(x_n + h\theta), \quad (\theta \in]0,1[)$$

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + h f(x_n, Y(x_n)) + \frac{h^2}{2} Y''(x_n + h\theta)$$

Subtraindo a esta expressão a expressão do método obtém-se:

$$Y(x_{n+1}) - y_{n+1} = Y(x_n) - y_n + h\left[f(x_n, Y(x_n)) - f(x_n, y_n)\right] + \frac{h^2}{2} Y''(x_n + h\theta)$$

Tomando módulos, usando a desigualdade triangular e a condição de que f é Lipschitz com constante L, obtém-se a seguinte desigualdade para o erro de discretização global:

$$|e_{n+1}| \leq (1 + hL)|e_n| + h\tau(h)$$

Usando o resultado dado, com $A = hL$, $B = h\tau(h)$, obtém-se:

$$|e_n| \leq e^{nhL}|e_0| + \frac{\tau(h)}{L}\left[e^{nhL} - 1\right]$$

Notando que $nh = x_n - x_0$ chega-se ao resultado pretendido.