INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Teste de 26 de Março de 2011

Duração: 1 hora e 15 minutos. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere o seguinte algoritmo para o cálculo do valor da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \tanh x$, num ponto x do seu domínio:

$$u_1 = \exp(-2x), \qquad u_2 = 1 - u_1, \qquad u_3 = 1 + u_1, \qquad z = f(x) = \frac{u_2}{u_3}.$$

(a)^{10} Supondo o cálculo efectuado num sistema de ponto flutuante de base 10 com n dígitos de mantissa e arredondamento simétrico determine o valor aproximado de $f\left(10^{-6}\right)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Note que $\exp\left(-2 \times 10^{-6}\right) = 0.9999980000\ldots$.

(b)^{15} Supondo que é apenas conhecido um valor aproximado $\tilde{x}$ de x e que as quatro operações envolvidas no cálculo de $z = f(x)$, supostas elementares, têm erros de arredondamento $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, respectivamente, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{z}$ de z. Utilize este resultado para analisar a estabilidade do problema e a estabilidade numérica do algoritmo.

[**2**] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x^2 - \cos x,$$

a qual tem dois zeros reais, $z \in [0.7, 0.9]$ e $-z$, e dois pontos fixos reais, $\tilde{w} \in [-0.6, -0.4]$ e $w \in [1.2, 1.4]$, ambos repulsores (isto é, tais que $|f'(\tilde{w})| > 1$ e $|f'(w)| > 1$).

(a)^{10} Mostre que a sucessão x_m definida por

$$x_{m+1} = \sqrt{\cos x_m}, \qquad m \geq 0,$$

converge para z para qualquer $x_0 \in [0.7, 0.9]$.

(b)^{10} Determine uma função G que tenha w como ponto fixo atractor (isto é, tal que $|G'(w)| < 1$), e que portanto possa ser utilizada como função iteradora para obter um valor aproximado de w pelo método do ponto fixo.

continua

[3] Considere o polinómio do 3º grau p definido por

$$p(x) = x^3 - x^2 - x - 1,$$

o qual tem um único zero real $z \in [1.7, 1.9]$.

(a)^{10} Verifique as condições suficientes de convergência do método de Newton aplicado a p no intervalo $[1.7, 1.9]$.

(b)^{15} Utilize o método de Newton com condição inicial $x_0 = 1.8$ para obter um valor aproximado do zero z com um erro absoluto inferior a 10^{-3}.

[4]^{10} O método de Muller é um método iterativo a três passos para obter um valor aproximado de um zero z de uma função $f \in C^3(I)$ tal que $f'(z) \neq 0$ cuja <u>fórmula de erro</u> tem a forma

$$z - x_m = A_m(z - x_{m-1})(z - x_{m-2})(z - x_{m-3}), \qquad m \geq 3,$$

onde A_m depende de $f, z, x_m, x_{m-1}, x_{m-2}, x_{m-3}$. Supondo que o método converge para quaisquer x_0, x_1, x_2 em I com ordem de convergência r e que $\lim_{m\to\infty} A_m = A$ mostre que:

(i) r é a única raiz real da equação $t^3 - t^2 - t - 1 = 0$;

(ii) $K_\infty^{[r]} = \lim_{m\to\infty} \dfrac{|z - x_m|}{|z - x_{m-1}|^r} = |A|^{(r-1)/2}$.