INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Teste de 26 de Março de 2011

[1]
(a)[10]

n	$\mathrm{fl}(u_1)$	$\mathrm{fl}(u_2)$	$\mathrm{fl}(u_3)$	$\mathrm{fl}\,(\mathrm{fl}(u_2) \div \mathrm{fl}(u_3))$
1	0.1×10	0.0		0.0
2	0.10×10	0.00		0.00
3	0.100×10	0.000		0.000
4	0.1000×10	0.0000		0.0000
5	0.10000×10	0.00000		0.00000
6	0.999998	0.200000×10^{-5}	0.200000×10	0.100000×10^{-5}

(b)[15]

$$\delta^L_{\tilde{u}_1} = \frac{-2xu_1}{u_1}\,\delta_{\tilde{x}} + \delta_1 = -2x\,\delta_{\tilde{x}} + \delta_1$$

$$\delta^L_{\tilde{u}_2} = -\frac{u_1}{u_2}\,\delta^L_{\tilde{u}_1} + \delta_2$$

$$\delta^L_{\tilde{u}_3} = \frac{u_1}{u_3}\,\delta^L_{\tilde{u}_1} + \delta_3$$

$$\begin{aligned}
\delta^L_{\tilde{z}} &= \delta^L_{\tilde{u}_2} - \delta^L_{\tilde{u}_3} + \delta_4 \\
&= -\frac{2u_1}{u_2u_3}(-2x\delta_{\tilde{x}} + \delta_1) + \delta_2 - \delta_3 + \delta_4 \\
&= p_f(x)\,\delta_{\tilde{x}} + q_1(x)\,\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 + \delta_4
\end{aligned}$$

$$p_f(x) = \frac{4xu_1}{u_2u_3} = \frac{4xe^{-2x}}{1-e^{-4x}} = \frac{2x}{\sinh(2x)}$$

$$q_1(x) = -\frac{2u_1}{u_2u_3} = -\frac{2e^{-2x}}{1-e^{-4x}} = -\frac{1}{\sinh(2x)}$$

O problema é estável para qualquer $x \in \mathbb{R}$ pois, com $p_f(0) = \lim_{x \to 0} p_f(x) = 1$, tem-se $p_f(x) \in [0, 1], \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

O algoritmo para o cálculo de $f(x)$ é numericamente instável para $x \approx 0$ pois $\lim_{x \to 0} |q_1(x)| = \infty$.

[2]
(a)[10] $I = [0.7, 0.9]$

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\cos x}, \qquad \forall x \in I$$

$$g(x) = \sqrt{\cos x}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \sin x (\cos x)^{-1/2}, \qquad g'(x) < 0, \ \ \forall x \in I$$

$$g''(x) = -\frac{1}{4}(\cos x)^{-1/2} - \frac{1}{4}(\cos x)^{-3/2}, \qquad g''(x) < 0, \quad \forall x \in I$$

A função g satisfaz às seguintes condições:

(i) $g \in C^1(I)$

(ii) $\max_{x \in I} |g'(x)| = |g'(0.9)| = 0.496769 < 1$,

pois g' é negativa e decrescente em I.

(iii) $g(I) \subset I$,

pois $g(0.7) = 0.875 \in I, \quad g(0.9) = 0.788 \in I$,

e g é decrescente em I.

Então o teorema do ponto fixo garante-nos que g tem um único ponto fixo em I e que a sucessão x_m, definida por $x_{m+1} = g(x_m)$, com $x_0 \in I$, converge para esse ponto fixo, que é também o único zero de f em I.

(b)[10] $\tilde{I} = [1.2, 1.4]$

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{x + \cos x}, \qquad \forall x \in \tilde{I}$$

$$G(x) = \sqrt{x + \cos x}$$

$$G'(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin x)(x + \cos x)^{-1/2}$$

$$G''(x) = -\frac{1}{2}\cos x(x+\cos x)^{-1/2} - \frac{1}{4}(1-\sin x)^2(x+\cos x)^{-3/2}$$

$$G'(x) > 0, \qquad G''(x) < 0, \qquad \forall x \in \tilde{I}$$

$$\max_{x\in\tilde{I}} |G'(x)| = |G'(1.2)| = 0.0271856 < 1,$$

pois G' é positiva e decrescente em $\tilde{I}$.

$$\Rightarrow \quad |G'(w)| < 1$$

[3]
(a)[10]

Condições suficientes de convergência do método de Newton para z, $\forall x_0 \in I = [1.7, 1.9]$:

(0) $p \in C^2(I)$

(i) $p(1.7) = -0.677, \;\; p(1.9) = 0.349 \;\;\Rightarrow\;\; p(1.7)p(1.9) < 0$

(ii) $p'(x) = 3x^2 - 2x - 1, \qquad p'(x) > 0, \;\; \forall x \in I$

(iii) $p''(x) = 6x - 2, \qquad p''(x) > 0, \;\; \forall x \in I$

(iv) $\left|\dfrac{p(1.7)}{p'(1.7)}\right| = 0.159 < 0.2, \qquad \left|\dfrac{p(1.9)}{p'(1.9)}\right| = 0.0579 < 0.2$

(b)[15]

Método de Newton:

$$x_m = g(x_{m-1}), \quad g(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)}, \quad m \geq 0, \qquad x_0 \in I$$

$$|z - x_m| \leq B_m, \qquad B_m = KB_{m-1}^2, \qquad K = \frac{\max_{x\in I}|p''(x)|}{2\min_{x\in I}|p'(x)|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x\in I}|p'(x)| = |p'(1.7)| = 4.27 \\ \max\limits_{x\in I}|p''(x)| = |p''(1.9)| = 9.4 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad K = 1.1007$$

$$x_0 = 1.8, \qquad |z - x_0| \leq 0.1 = B_0$$

$$K|z - x_0| \leq 0.11007 < 1$$

ALTERNATIVA:

$$|z - x_m| \leq \tilde{B}_m, \qquad \tilde{B}_m = \frac{|p(x_m)|}{2\min_{x\in I}|p'(x)|} = \frac{|p(x_m)|}{2|p'(1.7)|} = \frac{|p(x_m)|}{8.54}$$

m	x_m	B_m	$\tilde{B}_m$
0	1.8	0.1	0.244×10^{-1}
1	1.84062500	0.110×10^{-1}	0.858×10^{-3}
2	1.83928823	0.133×10^{-3}	0.946×10^{-6}

$z = 1.839288 + \Delta, \qquad |\Delta| \leq B_2.$

[4][10] Definindo $e_m = z - x_m$ e tomando módulos obtemos:

$$|e_m| = |A_m||e_{m-1}||e_{m-2}||e_{m-3}|.$$

Esta equação pode ser escrita na forma

$$\frac{|e_m|}{|e_{m-1}|^r}\left(\frac{|e_{m-1}|}{|e_{m-2}|^r}\right)^{\alpha}\left(\frac{|e_{m-2}|}{|e_{m-3}|^r}\right)^{\beta} = |A_m|, \tag{1}$$

onde α, β, r devem satisfazer

$$r - \alpha = 1, \qquad r\alpha - \beta = 1, \qquad r\beta = 1.$$

Daqui se obtém

$$\alpha = r - 1, \qquad \beta = \frac{1}{r},$$

e $r > 1$ é uma raiz da equação

$$t^3 - t^2 - t - 1 = 0. \tag{2}$$

Sendo o método convergente com ordem de convergência r existe o coeficiente assimptótico de convergência

$$K_\infty^{[r]} = \lim_{m\to\infty} \frac{|e_m|}{|e_{m-1}|^r}.$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$ em (1) obtemos então

$$\left(K_\infty^{[r]}\right)^{1+\alpha+\beta} = |A|,$$

ou

$$K_\infty^{[r]} = |A|^{r/(r^2+1)} = |A|^{(r-1)/2}.$$

<u>Nota</u>. Na alínea [3](b) obteve-se $r = 1.83929$ para a única raiz real da equação (2), o que mostra que a ordem de convergência do método de Muller está entre a dos métodos da secante $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\right)$ e de Newton (2).