MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011   Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [3a.1], [3a.2], [3a.3], [3a.4]

[**3a**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método de Newton**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo das soluções da equação $f(x) = 0$ para as seguintes funções:

[**3a.1**] (1) $f(x) = x^4 - 10x^3 - x + 11$

(2) uma função f à sua escolha

[**3a.2**] (1) $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2) uma função f à sua escolha

[**3a.3**] (1) $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2) uma função f à sua escolha

[**3a.4**] (1) $f(x) = e^x - 1.5 - \arctan(x)$

(2) uma função f à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em funções com zeros conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [3b.1], [3b.2], [3b.3], [3b.4]

[**3b**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método da secante**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo das soluções da equação $f(x) = 0$ para as seguintes funções:

[**3b.1**] (1) $f(x) = x^4 - 10x^3 - x + 11$

(2) uma função f à sua escolha

[**3b.2**] (1) $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2) uma função f à sua escolha

[**3b.3**] (1) $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2) uma função f à sua escolha

[**3b.4**] (1) $f(x) = e^x - 1.5 - \arctan(x)$

(2) uma função f à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em funções com zeros conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [3c.1], [3c.2], [3c.3], [3c.4]

[**3c**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método do ponto fixo**,

$$x_{m+1} = x_m + \omega f(x_m), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \text{ dado},$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$ é um parâmetro a determinar.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo das soluções da equação $f(x) = 0$ para as seguintes funções:

[**3c.1**] (1) $f(x) = x^4 - 10x^3 - x + 11$

(2) uma função f à sua escolha

[**3c.2**] (1) $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2) uma função f à sua escolha

[**3c.3**] (1) $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2) uma função f à sua escolha

[**3c.4**] (1) $f(x) = e^x - 1.5 - \arctan(x)$

(2) uma função f à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em funções com zeros conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [3d.1], [3d.2], [3d.3], [3d.4]

[3d] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método de Stephensen**,

$$x_{m+1} = x_m - \frac{[f(x_m)]^2}{f(x_m + f(x_m)) - f(x_m)}, \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \text{ dado.}$$

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo das soluções da equação $f(x) = 0$ para as seguintes funções:

[3d.1] (1) $f(x) = x^4 - 10x^3 - x + 11$

(2) uma função f à sua escolha

[3d.2] (1) $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2) uma função f à sua escolha

[3d.3] (1) $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2) uma função f à sua escolha

[3d.4] (1) $f(x) = e^x - 1.5 - \arctan(x)$

(2) uma função f à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em funções com zeros conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [4a.1], [4a.2], [4a.3], [4a.4], [4a.5]

[**4a**] Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$, A não singular, e $b \in \mathbb{R}^d$ são dados, $d \geq 2$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução única z deste sistema usando o **método de Jacobi modificado** ou **método JOR**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas lineares:

[**4a.1**] (1) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ \vdots \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(2) um sistema à sua escolha

[**4a.2**] (1) $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) um sistema à sua escolha

continua

[4a.3] (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) um sistema à sua escolha

[4a.4] (1) $A = \begin{bmatrix} 2^d & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^d & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^d & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^d \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2^d \\ 2^{d-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

(2) um sistema à sua escolha

[4a.5] (1) $A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \begin{cases} 2i, & j = i, \quad i = 1, 2, \ldots, d \\ 0.5i, & \begin{cases} j = i+2, & i = 1, 2, \ldots, d-2 \\ j = i-2, & i = 3, 4, \ldots, d \end{cases} \\ 0.25i, & \begin{cases} j = i+4, & i = 1, 2, \ldots, d-4 \\ j = i-4, & i = 5, 6, \ldots, d \end{cases} \\ 0, & \text{outros valores de } i \text{ e } j \end{cases}$

$b = [1 \;\; 1 \;\; \cdots \;\; 1 \;\; 1]^T$

(2) um sistema à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência; variação do parâmetro de relaxação; variação da dimensão do sistema. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em sistemas com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [4b.1], [4b.2], [4b.3], [4b.4], [4b.5]

[4b] Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$, A não singular, e $b \in \mathbb{R}^d$ são dados, $d \geq 2$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução única z deste sistema usando o **método de Gauss-Seidel modificado** ou **método SOR**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas lineares:

[4b.1] (1) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ \vdots \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(2) um sistema à sua escolha

[4b.2] (1) $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) um sistema à sua escolha

continua

[4b.3] (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) um sistema à sua escolha

[4b.4] (1) $A = \begin{bmatrix} 2^d & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^d & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^d & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^d \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2^d \\ 2^{d-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

(2) um sistema à sua escolha

[4b.5] (1) $A = [a_{ij}], \ \ a_{ij} = \begin{cases} 2i, & j = i, \quad i = 1, 2, \ldots, d \\ 0.5i, & \begin{cases} j = i + 2, & i = 1, 2, \ldots, d-2 \\ j = i - 2, & i = 3, 4, \ldots, d \end{cases} \\ 0.25i, & \begin{cases} j = i + 4, & i = 1, 2, \ldots, d-4 \\ j = i - 4, & i = 5, 6, \ldots, d \end{cases} \\ 0, & \text{outros valores de } i \text{ e } j \end{cases}$

$b = [1 \ \ 1 \ \ \cdots \ \ 1 \ \ 1]^T$

(2) um sistema à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência; variação do parâmetro de relaxação; variação da dimensão do sistema. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em sistemas com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [5a.1], [5a.2], [5a.3], [5a.4], [5a.5], [5a.6]

[5a] Considere um sistema de equações $f(x) = 0$ onde $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, é uma função contínuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z do sistema e tal que a sua matriz Jacobiana é invertível em z. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método de Newton generalizado**. Use o **método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot** para resolver o sistema linear que determina a diferença de duas iteradas sucessivas do método de Newton generalizado.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas não-lineares:

[5a.1] (1) $$\begin{cases} x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 = 0 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) uma sistema à sua escolha

[5a.2] (1) $$\begin{cases} 2x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 = 0 \\ 6x_1^2x_2 - x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) um sistema à sua escolha

[5a.3] (1) $$\begin{cases} x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 1 = 0 \\ 4x_1^3x_2 - 4x_1x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) um sistema à sua escolha

[5a.4] (1) $$\begin{cases} x_1^4 - 12x_1^2x_2^2 + 4x_2^4 - 1 = 0 \\ 4x_1^3x_2 - 8x_1x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) um sistema à sua escolha

continua

[5a.5] (1) $\begin{cases} x_1^3 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1^2 - x_2 - x_3 + 0.5 = 0 \\ e^{x_2} - x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$

(2) um sistema à sua escolha

[5a.6] (1) $\begin{cases} x_1 x_2 - x_3^2 + 3 = 0 \\ x_1 x_2 x_3 - x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ e^{x_1} - e^{x_2} + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$

(2) um sistema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em sistemas com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011   Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [8a.1], [8a.2], [8a.3]

[8a] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral usando a **fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 2 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número par.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos seguintes integrais:

[8a.1] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4\cos(2x)}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$

(2) um integral à sua escolha

[8a.2] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6\sin(2x)}{(x^2+4x+13)^3}\,dx$

(2) um integral à sua escolha

[8a.3] (1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011   Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [8b.1], [8b.2], [8b.3]

[8b] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral usando a **fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 4 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 4.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos seguintes integrais:

[8b.1] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4 \cos(2x)}{(x^2 + 2x + 5)^2}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[8b.2] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6 \sin(2x)}{(x^2 + 4x + 13)^3}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[8b.3] (1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [8c.1], [8c.2], [8c.3]

[**8c**] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral usando a **fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 6 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 6.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos seguintes integrais:

[**8c.1**] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4 \cos(2x)}{(x^2 + 2x + 5)^2}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[**8c.2**] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6 \sin(2x)}{(x^2 + 4x + 13)^3}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[**8c.3**] (1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [8d.1], [8d.2], [8d.3]

[8d] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral usando a **fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 2 nós de integração por sub-intervalo.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos seguintes integrais:

[8d.1] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4 \cos(2x)}{(x^2 + 2x + 5)^2}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[8d.2] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6 \sin(2x)}{(x^2 + 4x + 13)^3}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[8d.3] (1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [8e.1], [8e.2], [8e.3]

[**8e**] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral usando a **fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 3 nós de integração por sub-intervalo.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos seguintes integrais:

[**8e.1**] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4 \cos(2x)}{(x^2+2x+5)^2}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[**8e.2**] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6 \sin(2x)}{(x^2+4x+13)^3}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[**8e.3**] (1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [8f.1], [8f.2], [8f.3]

[8f] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral usando a **fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 4 nós de integração por sub-intervalo.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos seguintes integrais:

[8f.1] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4 \cos(2x)}{(x^2+2x+5)^2}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[8f.2] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6 \sin(2x)}{(x^2+4x+13)^3}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[8f.3] (1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [10a.1], [10a.2], [10a.3]

[10a] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 3ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10a.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), & \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10a.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), & \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. & \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

continua

[10a.3] (1) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - x - 1}{y(x) + x - 1}, & x \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \varepsilon\,(1 - [y_1(x)]^2)\, y_2(x) - y_1(x), \qquad x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \qquad y_2(0) > 0, \qquad \varepsilon = 0.1, 1.0, 10.0 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [10b.1], [10b.2], [10b.3]

[10b] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Heun de 3ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10b.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10b.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

continua

[10b.3] (1) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - x - 1}{y(x) + x - 1}, & x \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \varepsilon\,(1 - [y_1(x)]^2)\, y_2(x) - y_1(x), \qquad x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \qquad y_2(0) > 0, \qquad \varepsilon = 0.1, 1.0, 10.0 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [10c.1], [10c.2], [10c.3]

[10a] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Nystrom de 3ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10c.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10c.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

continua

[10c.3] (1) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - x - 1}{y(x) + x - 1}, & x \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \varepsilon\,(1 - [y_1(x)]^2)\, y_2(x) - y_1(x), \qquad x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \qquad y_2(0) > 0, \qquad \varepsilon = 0.1, 1.0, 10.0 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [10d.1], [10d.2], [10d.3]

[10d] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10d.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10d.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

continua

[10d.3] (1) $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{6x^2}{x^3+1}\, y(x) - \dfrac{2x}{x^3+1}, & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = [y_1(x)]^2(1 - 2y_2(x)), & \\ y_2'(x) = 2y_1(x)y_2(x)(-1 + y_2(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in \mathbb{R}, \qquad y_2(0) \in \mathbb{R} & \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [10e.1], [10e.2], [10e.3]

[10e] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Gill de 4ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10e.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10e.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

continua

[10e.3] (1) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - x - 1}{y(x) + x - 1}, & x \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \varepsilon\,(1 - [y_1(x)]^2)\, y_2(x) - y_1(x), \qquad x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \qquad y_2(0) > 0, \qquad \varepsilon = 0.1, 1.0, 10.0 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

TCCC – Exercícios [10f.1], [10f.2], [10f.3]

[10d] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Merson de 4ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10f.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), & \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10f.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), & \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. & \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

continua

[10f.3] (1) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - x - 1}{y(x) + x - 1}, \qquad x \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \varepsilon\,(1 - [y_1(x)]^2)\, y_2(x) - y_1(x), \qquad x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \qquad y_2(0) > 0, \qquad \varepsilon = 0.1, 1.0, 10.0 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.