INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Ano Lectivo: 2010/2011

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 16 de Junho de 2011 – Parte II

Duração: 1 hora e 45 minutos. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere o sistema linear $A_{\alpha,\beta}x = b_{\alpha,\beta}$ onde

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & \beta \\ 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix}, \qquad b_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1+\alpha\beta \\ 1+\beta \\ 1-\beta \end{bmatrix},$$

com $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

(a)^{15} Designando por $x_{\alpha,\beta}$ a solução do sistema e notando que a solução do sistema para $\alpha = 0$ é

$$x_{0,\beta} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T,$$

determine, sem resolver o sistema dado, um majorante de

$$\|x_{\alpha,\beta} - x_{0,\beta}\|_\infty .$$

(b)^{15} Determine o conjunto de valores de (α, β) para os quais o método iterativo de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $A_{\alpha,\beta}x = b_{\alpha,\beta}$, qualquer que seja a aproximação inicial escolhida. Note que este conjunto contém, mas não coincide, com o conjunto de valores de (α, β) para os quais a matriz $A_{\alpha,\beta}$ é uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas (ou por colunas).

[**2**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C([2, 5])$:

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
$f(x_i)$	4	3	2	0

(a)^{15} Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela pela fórmula de Lagrange.

(b)^{15} Determine o polinómio de grau 2, q_2, que interpola f no ponto $x_3 = 5$ e que constitui a melhor aproximação mínimos quadrados de f nos restantes três pontos da tabela.

[3] Pretende obter-se uma fórmula de quadratura

$$Q(f) = w_0 f(0) + w_1 f(x_1),$$

para aproximar o integrar

$$I(f) = \int_0^b f(x)\,dx,$$

onde $f \in C([0,b])$ e $b > 0$.

(a)^{15} Determine w_0, w_1 e x_1 de modo a que a fórmula seja exacta para polinómios de grau menor ou igual a 2.

(b)^{15} Admitindo que $f \in C^3([0,b])$ determine uma expressão para o erro de integração

$$E(f) = I(f) - Q(f).$$

[4] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + [y(x)]^2, & x \geq 1, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

(a)^{15} Obtenha um valor aproximado y_1 para $Y(1+h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Euler modificado.

(b)^{15} Obtenha um valor aproximado $\tilde{y}_1$ para $Y(1+h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Taylor de ordem 3.