INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2010/2011

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 16 de Junho de 2011 – Parte I

Duração: 1 hora e 15 minutos. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere o seguinte algoritmo para o cálculo do valor de um polinómio do 3º grau p num ponto $x \in \mathbb{R}$:

$$p(x) = [(x + a_2) \times x + a_1] \times x + a_0.$$

(a)^{10} Para $a_2 = -2, a_1 = 1, a_0 = -3$, e supondo que efectua o cálculo no sistema de ponto flutuante FP(10, 3, -10, 10), com arredondamento simétrico, calcule o valor aproximado de $p(2.17)$ e determine o seu erro relativo em relação ao valor exacto -0.029487.

(b)^{10} Supondo que $a_2 = a_1 = 0$, que x e a_0 são números reais com representação exacta no sistema de ponto flutuante utilizado no cálculo, e que a unidade de arredondamento deste sistema é U, mostre que o valor calculado de $p(x)$, $\tilde{p}(x)$, se pode escrever na forma

$$\tilde{p}(x) = A_3 x^3 + A_0,$$

onde A_0 e A_3 são valores aproximados de a_0 e 1, respectivamente, cujos erros relativos satisfazem a $|\delta_{A_0}| \le U$ e $|\delta_{A_3}| \le 3U$.

[**2**] Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3,$$

o qual tem uma única raiz real, z, situada no intervalo $[2.1, 2.2] =: I$.

(a)^{10} Mostre que o método da secante converge para z para quaisquer iteradas iniciais x_0 e x_1 no intervalo I.

(b)^{10} Calcule as iteradas x_2 e x_3 do método da secante com valores iniciais $x_0 = 2.1$ e $x_1 = 2.2$.

(c)^{15} Justifique a validade das duas seguintes estimativas de erro da iterada x_3:

$$\textbf{(i)}\ |z - x_3| \le K^2 |x_1 - x_0|^3; \qquad \textbf{(ii)}\ |z - x_3| \le \frac{|p(x_3)|}{M_1};$$

onde

$$K = \frac{M_2}{2M_1}, \qquad M_1 = \min_{x \in I} |p'(x)|, \qquad M_2 = \max_{x \in I} |p''(x)|,$$

e compare-as quantitativamente.

(d)[15] Diga, justificadamente, qual das duas seguintes funções, definidas para $x > 0$,

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}, \qquad g_3(x) = 1 + \sqrt{\frac{3}{x}},$$

pode ser utilizada para obter um valor aproximado da raiz z pelo método do ponto fixo.

[3][10] Considere uma função $g \in C^p(I),\ \ p \geq 2$, onde I é uma vizinhança de z, ponto fixo de g, tal que

$$g'(z) = \cdots = g^{(p-1)}(z) = 0, \qquad g^{(p)}(z) \neq 0.$$

Supondo que o método do ponto fixo com função iteradora g e iterada inicial $x_0 \in I$ converge para z, demonstre a seguinte estimativa do erro da iterada de ordem m do método:

$$|z - x_m| \leq K_p^{\frac{1}{1-p}} \left(K_p^{\frac{1}{p-1}} |z - x_0| \right)^{p^m},$$

onde

$$K_p = \frac{1}{p!} \max_{x \in I} \left| g^{(p)}(x) \right|.$$