INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Resolução do Exame de 16 de Junho de 2011 – Parte I

[1]
(a)[10]

$$\mathrm{fl}_s(2.17-2)=\mathrm{fl}_s(0.17)=0.170$$

$$\mathrm{fl}_s(0.170\times 2.17)=\mathrm{fl}_s(0.3689)=0.369$$

$$\mathrm{fl}_s(0.369+1)=\mathrm{fl}_s(1.369)=1.37$$

$$\mathrm{fl}_s(1.37\times 2.17)=\mathrm{fl}_s(2.9729)=2.97$$

$$\tilde{p}(2.17)=\mathrm{fl}_s(2.97-3)=\mathrm{fl}_s(-0.03)=-0.0300$$

$$\delta_{\tilde{p}(2.17)}=\frac{p(2.17)-\tilde{p}(2.17)}{p(2.17)}=\frac{0.513\times 10^{-3}}{-0.029487}=-0.174\times 10^{-1}$$

(b)[10]

$$p(x)=(x\times x)\times x+a_0$$

$$\begin{cases} z_1=x\times x\\ z_2=z_1\times x\\ p(x)=z=z_2+a_0\end{cases}$$

$$\delta_{\tilde{z}_1}=\delta_1$$

$$\delta_{\tilde{z}_2}=\delta_{\tilde{z}_1}+\delta_2=\delta_1+\delta_2$$

$$\delta_{\tilde{z}}=\frac{z_2}{z}\,\delta_{\tilde{z}_2}+\delta_3=\frac{z_2}{z}\,(\delta_1+\delta_2)+\delta_3$$

$|\delta_i|\le U, \quad i=1,2,3$
Erros de arredondamento das operações aritméticas

$$\begin{aligned}\tilde{z}&=z(1-\delta_{\tilde{z}})\\ &=z(1-\delta_3)-z_2(\delta_1+\delta_2)\\ &=(a_0+x^3)(1-\delta_3)-x^3(\delta_1+\delta_2)\\ &=a_0(1-\delta_3)+x^3(1-\delta_1-\delta_2-\delta_3)\end{aligned}$$

$$A_0 = (1-\delta_3)a_0, \quad A_3 = 1-\delta_1-\delta_2-\delta_3$$

$$\delta_{A_0} = 1 - \frac{A_0}{a_0} = \delta_3, \qquad |\delta_{A_0}| \le U$$

$$\delta_{A_3} = 1 - A_3 = \delta_1+\delta_2+\delta_3, \qquad |\delta_{A_3}| \le 3U$$

[2]
(a)[10]

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$$

$$p'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$$

$$p''(x) = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Condições suficientes de convergência do método da secante para z para $\forall x_0, x_1 \in I$:

(0) $p \in C^2(I)$

(i) $\begin{cases} p(2.1) = -0.459 \\ p(2.2) = 0.168 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p(2.1)p(2.2) < 0$

(ii) $p'(x) > 0, \ \ \forall x \in I$

(iii) $p''(x) > 0, \ \ \forall x \in I$

(iv) $\left|\frac{p(2.1)}{p'(2.1)}\right| = 0.0787 < 0.1, \qquad \left|\frac{p(2.2)}{p'(2.2)}\right| = 0.025 < 0.1$

(b)[10]

Método da secante:

$$x_{m+1} = g(x_{m-1}, x_{m-2}), \quad m \ge 2, \qquad g(x,y) = \frac{xp(y) - yp(x)}{p(y)-p(x)}$$

$$x_2 = 2.17321, \qquad x_3 = 2.17454$$

(c)[15]

(i) $|z - x_m| \leq K|z - x_{m-1}||z - x_{m-2}|, \quad m \geq 2$

$$|z - x_3| \leq K|z - x_2||z - x_1|$$

$$|z - x_3| \leq K^2|z - x_1||z - x_0||z - x_1|$$

$$|z - x_0| \leq |x_1 - x_0|, \qquad |z - x_0| \leq |x_1 - x_0|$$

$$|z - x_3| \leq K^2|x_1 - x_0|^3$$

(ii) $p(z) - p(x_3) = p'(\xi)(z - x_3), \qquad \xi \in]x_3; z[$

$$z - x_3 = -\frac{p(x_3)}{p'(\xi)}$$

$$|z - x_3| \leq \frac{|p(x_3)|}{M_1}$$

$$M_1 = p'(2.1) = 5.83, \qquad M_2 = p''(2.2) = 9.2, \qquad K = \frac{M_2}{2M_1} = 0.789$$

(i) $|z - x_3| \leq 0.789^2 \times 0.1^3 = 0.623 \times 10^{-3}$

(ii) $|z - x_3| \leq \dfrac{0.154 \times 10^{-3}}{5.83} = 0.264 \times 10^{-4}$

(d)[15]

O método do ponto fixo com função iteradora g_1 não converge para z pois z não é ponto fixo de g_1. Com efeito:

$$x = g_1(x) \iff p(x) + x^2 = 0, \quad x > 0$$

O método do ponto fixo com função iteradora g_3 converge para o ponto fixo $z \in I$ para x_0 suficientemente próximo de z pois z é ponto fixo atractor de g_3, isto é, $|g_3'(z)| < 1$. Com efeito:

$$x = g_3(x) \iff p(x) = 0, \quad x > 0$$

$$g_3'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\, x^{-3/2}, \qquad g_3''(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\, x^{-5/2}$$

$$\max_{x \in I} |g_3'(x)| = |g_3'(2.1)| = 0.285 < 1 \implies |g_3'(z)| < 1$$

[3][10]

Fórmula de Taylor de g em torno do ponto z:

$$g(x_m) = g(z) + \sum_{i=1}^{p-1} g^{(i)}(z)\,\frac{(x_m - z)^i}{i!} + g^{(p)}(\xi_m)\,\frac{(x_m - z)^p}{p!}, \qquad \xi_m \in]z; x_m[$$

Atendendo às hipóteses sobre as derivadas de g:

$$g(x_m) = g(z) + g^{(p)}(\xi_m)\,\frac{(x_m - z)^p}{p!}$$

Atendendo à definição de ponto fixo e à expressão do método:

$$z - x_{m+1} = (-1)^{p+1} g^{(p)}(\xi_m)\,\frac{(z - x_m)^p}{p!}$$

Estimativa de erro:

$$|z - x_{m+1}| \leq K_p |z - x_m|^p, \quad m \geq 0, \qquad K_p = \frac{1}{p!} \max_{x \in I} \left| g^{(p)}(x) \right|$$

Estimativa de erro à priori:

$$w_{m+1} \leq w_m^p, \qquad w_m := K_p^{\frac{1}{p-1}} |z - x_m|, \qquad m \geq 0$$

$$w_1 \leq w_0^p, \quad w_2 \leq w_1^p \leq w_0^{p^2}, \quad \ldots \quad w_m \leq w_0^{p^m}$$

$$|z - x_m| \leq K_p^{\frac{1}{1-p}} \left(K_p^{\frac{1}{p-1}} |z - x_0| \right)^{p^m}$$