Análise Matemática IV

Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 3 Junho 2006

Nome:______________________________
Número:____________________ Curso:________

Duração: 1H 30M
Cotação das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 0.7 v. Errada: -0,2v.

A preencher pelo docente:

Correctas	Erradas	TEM	PD
Nota			

---

1. Considere a lista de afirmações seguinte para a equação diferencial **[0.7]**

$$(x^2 \operatorname{sen} u + x \cos u)\frac{du}{dx} = 2x \cos u - \operatorname{sen} u.$$

I. A equação é exacta.
II. A equação é linear.
III. A equação é separável.
IV. A equação é redutível a exacta com factor integrante $\mu = x$.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ II e IV ☐ III e IV ☐ I.

---

2. O Teorema de Picard garante a existência de solução única numa vizinhança de $t_0 = 2$ para o problema de valor inicial: **[0.7]**

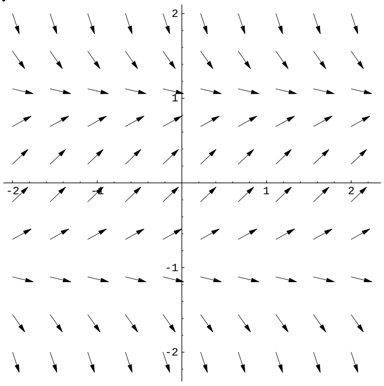
$$\begin{cases} (y-1)\frac{dy}{dt} = t - 1 \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

O intervalo máximo de definição desta solução é
☐ $\mathbb{R}$ ☐ $]0, +\infty[$ ☐ $]1, +\infty[$ ☐ $]-2, +\infty[$

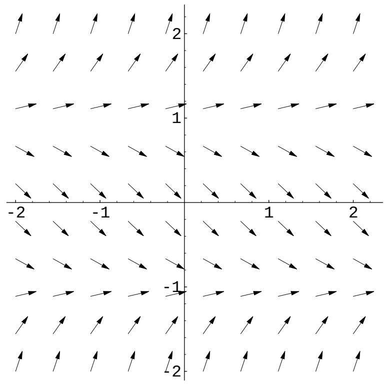
---

3. Considere os campos de direcções seguintes **[0.7]**

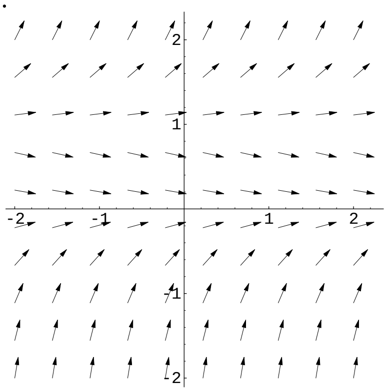
A.



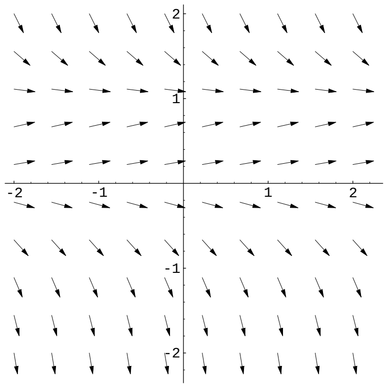
B.



C.



D.



O campo de direcções correspondente à equação diferencial $y' = (y-1)(y+1)$ é

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

---

4. A matriz wronskiana de uma equação diferencial de 4ª ordem, homogénea, de coeficientes constantes, tem na sua primeira linha as funções t e te^t. Então a equação é: **[0.7]**

☐ $y^{(4)} - y''' + y = 0.$ ☐ $y^{(4)} - 3y''' - y'' - y' = 0.$

☐ $y^{(4)} - y''' = 0$ ☐ $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0.$

---

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. A matriz e^{At} é: **[0.7]**

☐ $\begin{bmatrix} e^t\cos(2t) & -e^t\operatorname{sen}(2t) & 0 \\ e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) & 0 \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} (t+1)e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & (t+1)e^{2t} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} e^t\cos t & -e^t\operatorname{sen} t & 0 \\ e^t\operatorname{sen} t & e^t\cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

---

6. Sendo A uma matriz, 2×2, e $X(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ uma matriz solução fundamental do sistema $y' = Ay$, então a solução do problema de valor inicial $y' = Ay + h(t)$ com $y(0) = 0$ e $h(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$ é: **[0.7]**

☐ $\begin{bmatrix} te^t \\ e^t - e^{-t} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} e^{2t} + te^t - e^t \\ 2te^t \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} e^{2t} + te^t - e^t \\ e^{2t} - e^t \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} e^{2t} - e^t \\ e^{2t} - e^t \end{bmatrix}$

---

7. A separação de variáveis $u(t,x) = T(t)X(x)$ para o problema **[0.7]**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu \\ u(t,0) = u_x(t,2\pi) = 0, \end{cases}$$

conduz a famílias de funções T_n e X_n ($n \in \mathbb{N}$) que verificam (onde C_n designa uma constante arbitrária):

☐ $\begin{cases} T_n' = -(\frac{n^2}{16} + t)T_n \\ X_n(x) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{4}x\right) \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} T_n' = -\frac{n^2}{16}T_n \\ X_n(x) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{4}x\right) \end{cases}$

☐ $\begin{cases} T_n' = -n^2 T_n \\ X_n(x) = C_n \cos(nx) \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} T_n' = -(n^2 + t)T_n \\ X_n(x) = C_n \cos(nx) \end{cases}$

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

8. Efectuando a mudança de variável $u = \frac{1}{y^2}$ na equação **[1.5]**

$$-2x\frac{dy}{dx} + y - xy^3 = 0,$$

determine a sua solução geral, bem como a solução que verifica $y(1) = -1$

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Indique qual a equação diferencial que tem A como matriz companheira e determine a solução geral dessa equação. **[0.7]**

b) Determine e^{At} . **[1.4]**

10. Determine a série de senos da função $f(x) = e^x$ para $x \in [0, \pi]$. Diga para que valores converge a série que calculou. **[1.5]**

(Sugestão: No cálculo dos coeficientes da série é conveniente escrever na forma de uma exponencial (complexa) os senos ou cosenos.)