

Análise Matemática IV

Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
1º Semestre — 31 Março 2006

Nome: _____
Número: _____ Curso: _____

Duração: 45 Minutos

Cotação das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 0.7 v. Errada: -0,2v.

A preencher pelo docente:

Correctas	Erradas	TEM	PD
Nota			

1. Considere $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$. As soluções da equação $\operatorname{tg} z = 3i$, são: [0.7]

$(\frac{\pi}{2} + k\pi) - \frac{i}{2} \ln(\frac{1}{2})$. $\frac{\pi}{2} + ki$. $k\pi - \frac{i}{2} \ln 2$ $\ln(\frac{1}{2}) + i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$

2. Considere $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\bar{z} - i}{|z|^2 + 1}$ as afirmações seguintes: [0.7]

- I. f é diferenciável em $z = -i$ e $f'(-i) = \frac{1+i}{2}$.
- II. f é diferenciável em $z = i$ e $f'(i) = \frac{1}{2}$.
- III. $f'(0) = -1 + i$.
- IV. f é analítica no círculo $|z| < \frac{1}{2}$.

A lista completa de afirmações correctas é:

- II I e IV I e III II e IV.

3. Nos integrais seguintes considere a curvas simples e percorrida no sentido positivo. [0.7]

$$A = \oint_{|z-1|=1} \frac{z}{z^2 - 1} dz, \quad B = \oint_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z + i} dz$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- $A = 2\pi i$ e $B = \frac{1}{2}$.
- $A = B = 0$.
- $A = \pi i$ e $B = 0$.
- $A = 0$ e $B = 2\pi i$.

4. Diga qual das igualdades seguintes é verdadeira:

[0.7]

$i^i = e^{i(1+\pi/2)}$

$i^i = e^{-\pi/2}$

$i^i = e^{-\pi}$

$i^i = e^{i-\pi}$

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

5. Seja C a circunferência de centro em zero e raio 2, percorrida uma só vez no sentido positivo.

a) Mostre que para $|z| = 2$ se tem $\operatorname{Im}(z) = \frac{z^2 - 4}{2iz}$.

[1.2]

b) Calcule o integral

[1]

$$\oint_C \operatorname{Im}(z) dz,$$

e justifique por que razão o Teorema de Cauchy não é aplicável.