Análise Matemática IV

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
2º Semestre — 12 Junho 2006

Nome: ____

Número: ______________________________ Curso: ____________

Indique qual ou quais dos testes entrega:

1º Teste ☐ 1º Teste e 2º Teste ☐

2º Teste ☐

A preencher pelo aluno

Pergunta	Nº das pág. onde está a resolução
T1- 9 a)	
T1- 9 b)	
T1- 10	
T1- 11	
T2-18	
T2-19	
T2-20	

A preencher pelo docente

Pergunta	Classificação	Cotação
T1-9 a)		0.7
T1-9 b)		0.8
T1-10		1.8
T1-11		1.8
T2-18		1.3
T2-19		1.6
T2-20		2.2
EM-Cert.		
EM-Erra.		
EM-Total		

Registo:	**Nota:**

1º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 1 a 10

2º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 11 a 20.

1º Teste + 2º Teste (duração: 3h00m): Todas as perguntas.

Cotações: Perguntas de escolha múltipla: Certa: **0.7 val.** Errada: **- 0.2val.**

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- As perguntas de escolha múltipla devem ser respondidas neste enunciado, e as perguntas de desenvolvimento em caderno separado. **Identifique** e **numere** as páginas do seu caderno de respostas.

Início do 1º Teste

1. Para $z \in \mathbb{C}$, considere a equação: **[0.7]**

$$z^2 + z - \bar{z} + 1 = 0,$$

e a seguinte lista de afirmações:

I. Todas as soluções da equação pertencem à circunferência $|z| = \sqrt{3}$.
II. A equação tem 4 soluções.
III. A equação não tem soluções reais.
IV. $z = i$ é solução da equação.

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e III ☐ II e IV ☐ I e II e IV ☐ I

---

2. Para $z \in \mathbb{C}$ considere as afirmações: **[0.7]**

I. $\operatorname{sen}(z) = -i \operatorname{senh}(iz)$.
II. O ramo principal do logarítmo só está definido para $z > 0$.
III. A equação $z^4 - 1 = 0$ só tem uma raiz.
IV. A equação $e^z = -1$ é impossível.
A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ II ☐ III e IV ☐ I

---

3. Considere a seguinte lista de afirmações para a função $f(z) = z^2 - 2\,(\operatorname{Re}(z))^2$. **[0.7]**

I. f é diferenciável em $z = 1 - i$.
II. Há pontos do eixo imaginário onde f é diferenciável.
III. A parte imaginária de f é uma função harmónica.
IV. $z = 0$ é o único ponto onde f é diferenciável.

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ II e III ☐ II e IV ☐ I e III ☐ I

---

4. Considere a circunferência C, definida por $|z-\pi|=1$, percorrida uma só vez no sentido positivo, e os integrais **[0.7]**

$$A=\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^2}\,dz \qquad B=\oint_C \frac{\cos z}{z^2}\,dz.$$

Os valores de A e B são:

- ☐ $A=0$ e $B=0$.
- ☐ $A=-2\pi i$ e $B=0$.
- ☐ $A=0$ e $B=-2\pi i$.
- ☐ $A=-2\pi i$ e $B=2\pi i$.

---

5. Seja $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_pz^p$ um polinómio de grau $p\geq 1$, com $a_0\neq 0$. Considere ainda, **[0.7]**

$$f(z)=\frac{P(z)}{z^n}, \qquad 0<n\leq p,$$

e a lista de afirmações seguinte:

I. f tem um pólo de ordem n em $z=0$
II. f tem uma singularidade removível em $z=0$
III. O resíduo de f em $z=0$ é a_{n-1}.
IV. Se $n=2$ então o resíduo de f em $z=0$ é a_2.

A lista <u>completa</u> das afirmações correctas é:

☐ II e IV ☐ I e IV ☐ I e III ☐ II e III

---

6. Seja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ uma função cujas únicas singularidades são -1 e 2. Então o raio de convergência da série de Taylor de f em torno do ponto $(2+i)$ é **[0.7]**

☐ $\sqrt{2}$. ☐ 1. ☐ $\frac{1}{2}$. ☐ 2.

---

7. O desenvolvimento em série de Laurent de $\dfrac{2z}{z^2-1}$, na região $|z-1|>2$, é: **[0.7]**

☐ $\displaystyle\frac{2}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-1)^{n+1}}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{(z-1)^{n+2}}$

☐ $\displaystyle\frac{2}{z+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^{n+1}}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^{n+1}}$

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

8. Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $u_g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$u(x,y)=g(x)y+x^2y.$$

a) Determine a forma geral de g para que u seja uma função harmónica. **[0.7]**

b) Determine uma função, f, analítica, $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, com $u(x,y)=xy$. Calcule ainda $f'(1+i)$. **[0.8]**

9. Considere a curva $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ percorrida uma só vez no sentido positivo. Determine o integral **[1.8]**

$$\int_\Gamma\left(z^2\operatorname{sen}\frac{1}{z}+\frac{\cos(\pi z)}{z-\frac{1}{2}}\right)dz.$$

10. Use o Teorema dos resíduos para calcular o integral: **[1.8]**

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta.$$

$\boxed{\textbf{FIM do } 1^{\underline{o}} \textbf{ Teste}}$

Início do 2º Teste

11. Fazendo a mudança de variável $x = \frac{y}{t}$, a equação diferencial **[0.7]**

$$y' = \frac{t^2 + 2y^2}{3ty}, \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y > 0,$$

é transformada na equação:

☐ $\dfrac{3x}{1-x^2}x' = \dfrac{1}{t}$ ☐ $(3x^2+1)x' = \dfrac{1}{t}$

☐ $\dfrac{2x}{x^2+1}x' = \dfrac{1}{t}$ ☐ $x^2x' = \dfrac{1}{t}$

---

12. Sabendo que $\mu(x) = x^2$ é um factor integrante da equação linear $y' + a(x)y = b(x)$, então **[0.7]**

☐ $a(x) = \dfrac{x}{2}$ ☐ $a(x) = \dfrac{2}{x}$ ☐ $a(x) = \dfrac{3}{x}$ ☐ $a(x) = \dfrac{x^3}{3}$

---

13. Para o problema de valor inicial (P.V.I.), **[0.7]**

$$y' = \sqrt{y}, \qquad y(t_0) = y_0$$

considere a seguinte lista de afirmações:

I. Se $(t_0, y_0) = (0, 0)$ então o Teorema de Picard garante que P.V.I. tem solução única numa vizinhança de (t_0, y_0).
II. Se $y_0 > 0$ então o P.V.I. tem solução única numa vizinhança de t_0.
III. Se $(t_0, y_0) = (0, 0)$ então o P.V.I. tem infinitas soluções definidas em $\mathbb{R}$.
IV. $y(t) = t^2 + 1$ é solução do P.V.I. com condição inicial $y(0) = 1$

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e III ☐ II e III ☐ II e IV ☐ II e III e IV

---

14. Considere a equação **[0.7]**

$$(2t+3xt^2)\frac{dx}{dt} = -x(1+2xt).$$

Diga qual das afirmações é verdadeira

☐ A equação é exacta.
☐ A equação é redutível a exacta com factor integrante $\mu(t) = t$.
☐ A equação é redutível a exacta com factor integrante $\mu(x) = x$.
☐ A equação é linear.

---

15. Sabendo que a solução geral de uma equação homogénea, de 3ª ordem, de coeficientes constantes, $Ly = 0$, é dada por $y(t) = c_1e^t + c_2\cos t + c_3 \operatorname{sen} t$, então uma solução particular de $Ly = -16e^{-t}$ é **[0.7]**

☐ $2e^{-t}$ ☐ $4e^{-t}$ ☐ e^{-t} ☐ $3e^{-t}$

---

16. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. A matriz e^{At} é: **[0.7]**

☐ $A = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-e^t & e^t \end{bmatrix}$ ☐ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

☐ $A = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 1-e^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$ ☐ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-e^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

---

17. Considere a função g definida em $[0,1]$ por $g(x) = x$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira **[0.7]**

☐ A série de senos de g é a série de Fourier de $f(x) = |x|$ para $x \in [-1,1]$.
☐ A série de cosenos de g é a série de Fourier de $f(x) = |x|$ para $x \in [-1,1]$.
☐ A série de cosenos de g em $x = 0$ converge para $\frac{1}{2}$.
☐ A série de senos de g em $x = 0$ converge para $\frac{1}{2}$.

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

18. Determine a solução de **[1.3]**

$$x^2 y' = 1 - 2xy, \qquad y(1) = 0,$$

bem como o seu intervalo máximo de definição.

19. Determine a solução geral do sistema de EDOs: **[1.6]**

$$\begin{cases} x' = x + e^{-t} \\ y' = x + y + 2e^{-t} \end{cases}$$

20. Usando o método de separação de variáveis, determine uma solução da equação **[2.2]**

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 2u$$

que verifica as condições de fronteira $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0$ e a condição inicial

$$u(0,x) = \pi x \quad \text{para} \quad x \in [0,\pi].$$