Análise Matemática IV

Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 3 Junho 2006

Respostas e resolução sumária do teste de 3 de Junho

---

1. Resposta:
Opção 4 – (I.)

2. Resposta:
Opção 3— $]1, +\infty[$

3. Resposta:
Opção 2—Campo B

4. Resposta:
Opção 4: $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$

5. Resposta:
Opção 1: $\begin{bmatrix} e^t\cos(2t) & -e^t\operatorname{sen}(2t) & 0 \\ e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

6. Resposta:
Opção 4: $\begin{bmatrix} e^{2t} - e^t \\ e^{2t} - e^t \end{bmatrix}$

7. Resposta:
Opção 1: $\begin{cases} T_n' = -(\frac{n^2}{16} + t)T_n \\ X_n(x) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{4}x\right) \end{cases}$

8. Efectuando a mudança de variável $u = \frac{1}{y^2}$ na equação tem-se

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2}{y^3}\frac{dy}{dx}.$$

Substituindo na equação:

$$-2x\frac{dy}{dx} + y - xy^3 = 0 \Longleftrightarrow x\frac{du}{dx} + u = x.$$

Ou seja para $x \neq 0$ e $y \neq 0$ temos a equação linear não homogénea:

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = 1.$$

Um factor integrante desta equação é $\mu(x) = x$ e portanto

$$x\frac{du}{dx} + u = x \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}(xu) = x$$

Integrando vem

$$xu = \frac{x^2}{2} + C \Longrightarrow u(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x} = \frac{x^2 + 2C}{2x}.$$

Como a condição inicial $y(1) = -1$ implica $u(1) = 1$ então $C = \frac{1}{2}$. Logo $u(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ e portanto

$$y(x) = -\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}$$

(deve tomar-se o sinal menos na igualdade anterior já que $y(1) = -1$).

9.

a) Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz companheira de uma equação diferencial então temos

$$\begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix},$$

ou seja $y''' = y''$. A equação diferencial $y''' - y'' = 0$ é homogénea e as raízes do seu polinómio característico, $\lambda^3 - \lambda^2$, são 0 e 1 com multiplicidades 2 e 1 respectivamente. Logo, são soluções linearmente independentes da equação $1, t$ e e^t. A solução geral é

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t$$

com c_1, c_2 e c_3 constantes arbitrárias.

b) Usando a alínea anterior tem-se que a matriz wronskiana

$$W(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & e^t \\ 0 & 1 & e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix},$$

é uma matriz solução fundamental para o sistema $z' = Az$ e portanto $e^{At} = W(t)W^{-1}(0)$, ou seja

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & e^t \\ 0 & 1 & e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & t & e^t \\ 0 & 1 & e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & e^t - t - 1 \\ 0 & 1 & e^t - 1 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

10. A série de senos da função $f(x) = e^x$ ($x \in [0, \pi]$) é dada por

$$SS_f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx), \qquad \text{com} \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen}(nx)\, dx.$$

Como $\operatorname{sen}(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx})$ então

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{1+in} x\, dx \right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1+in} (e^{(1+in)\pi} - 1) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{n}{n^2+1} (1 - e^{\pi} \cos(n\pi)) = \frac{2n}{\pi(n^2+1)} (1 - (-1)^n e^{\pi}) \end{aligned}$$

Logo

$$SS_f = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} (1 - (-1)^n e^{\pi}) \operatorname{sen}(nx).$$

Como a função e^x é contínua, então a série de senos converge para e^x se $x \in]0, \pi[$. Nos pontos $x = 0$ e $x = \pi$ a série converge para zero. Note que a série de senos de f é a série de Fourier do prolongamento ímpar de f ao intervalo $[-\pi, \pi]$.