Análise Matemática IV

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 2005/06

Semana 6

1. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

a) $\dfrac{dy}{dt} = e^t y$ b) $\psi' = \psi - t$

c) $\dfrac{dy}{dt} + y \operatorname{sen} t = 0$ d) $\dfrac{di}{dt} - 6i = 10 \operatorname{sen}(2t)$

e) $y'(x) = 2xy(x) + x$ f) $(1+y^2)\dfrac{dx}{dy} = \arctan y - x$

g) $w' = \dfrac{2t}{t^2+1} w + t^2 - 1.$

2. Determine a solução dos problemas de valor inicial seguintes e indique qual o seu intervalo máximo de definição.

a) $L\dfrac{dI}{dt} + RI = V,\ I(0) = 0.$

b) $\dfrac{dy}{dt} + \sqrt{1-t^2}\,y = 0,\ y(0) = e^2.$

c) $y' = 2ty + t,\ y(0) = 1.$

d) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2u}{1+u^2}v - \dfrac{1}{1+u^2} = 0,\ v(0) = 1.$

e) $x' + h(t)x - t = 0,\ x(-1) = 2, \text{com}\, h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ t & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases}.$

3. Considere uma equação diferencial da forma $y' = f\left(\dfrac{y}{t}\right)$.

a) Mostre que se fizer a mudança de variável $x = \dfrac{y}{t}$ a equação dada se reduz a uma equação separável.

b) Use a alínea anterior para determinar a solução geral da equação:

$$t^2\frac{dy}{dt} = 2ty + y^2.$$

4. A temperatura T de uma sala aquecida decresce a razão de 0,008 vezes a diferença entre a temperatura actual e a temperatura exterior fixa a 15 graus. Sabendo que no instante inicial $t = 0$ a temperatura da sala era 25 graus determine ao fim de que tempo a temperatura da sala atinge 18 graus.

5. Uma dada cultura de bactérias duplica de tamanho ao fim de 10 minutos. Se a cultura tem 100 indivíduos no instante inicial $t = 0$ ao fim de quanto tempo atinge 3000?

6. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

a) $u' = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$.

b) $x^3 + (y+1)^2\frac{dy}{dx} = 0$

c) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$

d) $\phi' = e^{\phi - 2t}$

7. Considere a equação diferencial separável $x' = x \operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e o seu intervalo máximo de existência.

8. Determine a solução dos problemas de valor inicial seguintes, indicando o intervalo máximo de existência de cada solução

a) $y' \operatorname{sen} y = \frac{-t\cos y}{1+t^2}$, $y(1) = \pi/2$.

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{x - xt^2}$, $x(2) = 3$

Semana 7

9. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty} \quad , \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y > 0$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.
Sugestão: Considere a mudança de varável $v = y/t$.

10. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0, \qquad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

11. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

12. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

13. Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \operatorname{sen}(t) + x' = 0 \tag{2}$$

a) Mostre que a equação (2) não é exacta.

b) Determine em que condições uma equação na forma

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0$$

admite um factor integrante que é uma função de t, isto é, da forma $\mu(t)$, para uma certa função real de variável real μ, e escreva uma equação diferencial ordinária satisfeita por μ.

c) Determine a solução da equação (2) que satisfaz a condição inicial $x(\pi) = 1$, e indique o intervalo máximo de definição da solução.

14. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3}$$

a) Mostre que (3) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (3) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

15. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

(a) $y' = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$,   (b) $y' = (2-y)\,(y-1)$,

(c) $y' = y\,(1-y^2)$,   (d) $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$,

$\boxed{\text{Semana 8}}$

16. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

17. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

18. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2 \ , \end{cases}$$

(i) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.

(ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

(iii) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

19. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 \ , \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que $\dfrac{dy}{dt} \geqslant \dfrac{1}{3\left(u(t)\right)^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}}$, e integre esta relação entre 0 e t.

20. Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

21. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, com $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

22. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, com $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

23. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.

24. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + t \\ y' = x - y + e^t \end{cases} \quad , \quad x(0) = y(0) = 0$$

25. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea.

(ii) Sendo $\mathbf{y}(t) = [y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t)\ y_4(t)]^T$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

26.

(i) Determine a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

que satisfaz a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = 1$.

(ii) Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

utilize a alínea anterior para determinar a solução que verifica a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = z(0) = 1$.

Semana 9

27. Determine a solução da equação linear:

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' - 2 = b(t)$$

que verifica as condições iniciais

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(i) $b(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) $b(t) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(iii) $b(t) = e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

28. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = (1 + e^{-x})^{-1}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$

29. Considere a equação

$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0$$

(i) Determine a sua solução geral.

(ii) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to \infty$.

30. Seja $k > 0$. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação

$$y'' - 2cy' + y = 0$$

admite uma solução satisfazendo $y(0) = y(2k\pi) = 0$, que não seja identicamente nula?

31. Considere a equação

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t + \cos t \tag{4}$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (4).

(ii) Determine uma solução particular de (4).

(iii) Determine a solução de (4) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

Semana 10

1. Calcule as transformadas de Laplace e as regiões de convergência das funções definidas em $t \geq 0$ pelas expressões seguintes:

   (a) $f(t) = \cosh(at)$ (b) $f(t) = t\,\mathrm{sen}(at)$

   (c) $f(t) = e^{at}\cos(bt)$ (d) $f(t) = \dfrac{\mathrm{sen}(t)}{t}$, $(t > 0)$

2. Calcule a inversa da Transformada de Laplace de

   (a) $(s^2 - 1)^{-2}$ (b) $6(s^4 + 10s^2 + 9)^{-1}$

   (c) $\dfrac{s+1}{s^2 + s - 6}$ (d) $\dfrac{1}{(s+1)^4}$

3. Utilizando a Transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   a) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

   b) $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$, $\omega^2 \neq 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   c) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ sendo

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{se } 0 \leq t < \pi \text{ e } t \geq 2\pi \end{cases}$$

4. Designa-se por δ a função de Dirac com suporte na origem. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   a) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   b) $y'' + y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

   c) $y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Semana 11 e 12

32. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:

a) $y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

33.

a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0,1[\\ u(0,t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1,t) = \sin 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) + \sin(x) \ .$$

34. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \ x \in (0,\pi), \ \text{com} \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin(x) - 2 \ \sin(5x). \end{cases}$$

35. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \ x \in (0,L), \ \text{com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

36. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad \ \ 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

37. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

38. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

39. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } \sin x > 0 \\ 0 & \text{se } \sin x \leqslant 0 \end{cases}$$

40. Desenvolva a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

41. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

a) a série de Fourier associada a f;

b) a série de senos associada a f;

c) a série de cosenos associada a f.

42. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1$, $u(L,t) = T_2$.

c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira $\begin{cases} u(0,t) = 20 \\ u(1,t) = 60 \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$

43. Seja a função f definida no intervalo $(0,\pi)$ por $f(x) = \sin(x)$.

(a) Determine a série de Fourier de cosenos da função f.

(b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi,\pi]$.

(c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \ x \in \,]0,\pi[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

44. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = 0 \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$) e onde c é um parâmetro real.

45. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$.

46.

a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, \pi[$).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = (\pi - x)x \ .$$

47. Seja f a função definida no intervalo $]0, 2\pi[$ por $f(x) = x$.

1. Determine a série de cosenos da função f.
2. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \ x \in (0, 2\pi) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

48. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x, 0, t) = x \ , \quad u(x, 1, t) = x \\ u(0, y, t) = 0 \ , \quad u(1, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi\,(x - y)) - \cos(2\pi\,(x + y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$.