Análise Matemática IV

2º Semestre — 2005/06

Semana 1: Números complexos

1. Escreva os números complexos seguintes na forma cartesiana (i.e $x + iy$).

a) $(3-i)(3+i)(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i)$.

b) $e^{5\pi i/6}$.

c) $\dfrac{10}{(2-i)(i-1)(i-3)}$.

d) i^{13}

e) $\left(\sqrt{3}+i\right)^7$.

2. Escreva na forma polar (i.e $\rho e^{i\theta}$) os números complexos seguintes.

$$i-1, \quad \sqrt{3}-i, \quad (\cos\frac{1}{3} - i\,\sin\frac{1}{3})^2, \quad (1+i\sqrt{3})^n.$$

3. Calcule e represente geométricamente os números complexos seguintes:

a) $\sqrt[3]{-i}$

b) $\sqrt[4]{-1}$

c) $\sqrt{1+i}$

d) $\sqrt[4]{64+64\sqrt{3}i}$.

4. Mostre que para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ se verificam as desigualdades:

a) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ e $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

b) $|w+z| \leq |w| + |z|$.

c) $||w| - |z|| \leq |w+z|$.

5. Use o problema anterior para mostrar que se z pertence à circunferência de centro na origem e raio 2 então$\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right| \leq \frac{1}{3}$ (Sugestão: Factorize o polinómio do denominador em factores quadráticos).

6. Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo.

a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Im}(z-i) < 2\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < |z+1|\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z \leq \pi/3,\ z \neq 0\}$.

d) $\{z \in \mathbb{C} : z = 2i + 3\cos\theta + 3i \operatorname{sen}\theta,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

e) $\{z \in \mathbb{C} : z = i + (2-i)t,\ t \in \mathbb{R}\}$.

f) $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| + |z+3-2i| < 3\}$.

g) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-2i|\}$.

7. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) $(1+z)^3 = 1$.

c) $z\bar{z} - z + \bar{z} = 0$.

d) $z^6 = (i+2)^3 + \frac{1-28i}{2-i}$.

e) $|e^{i\theta} - 1| = 2, \theta \in \mathbb{R}$ (interprete geometricamente).

f) $z^4 + z^2 = -1 - i$

8. Mostre que se z_1, z_2 e $z_1 + z_2$ têm módulo 1 então o ângulo entre z_1 e z_2 é $\pm\frac{2\pi}{3}$.

Semana 2: Limites, continuidade e diferenciabilidade; funções elementares;

1. Estude quanto à convergência as seguintes sucessões complexas.

a) $\dfrac{i^n}{n}$.

b) $\dfrac{(-1)^n n}{n+i}$.

c) $\dfrac{n^2 + in}{n^2 + i}$.

2. Para $z, w \in \mathbb{C}$, estabeleça as identidades seguintes:

a) $\cos(iz) = \cosh(z)$.

b) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$.

c) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.

d) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$

3. Calcule as soluções das equações seguintes

a) $e^{(2z-1)} = 1$.

b) $e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0$

c) $\cos z = 2$.

d) $\operatorname{senh}(z) = i$

4. Para cada um dos conjuntos $Z \subset \mathbb{C}$, represente geometricamente o conjunto dos seus logarítmos, i.e. o conjunto

$$W = \{w \in \mathbb{C} : \, e^w \in Z\}.$$

a) $Z = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) < 0\}$

b) $Z = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = e, \, \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}\right\}$

5. Determine as partes reais e imaginárias das seguintes funções de variável complexa, e indique os pontos onde são contínuas.

a) $z|z|$.

b) $\dfrac{1}{2z + 3i}$

c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$

6. Mostre que a função complexa definida por $f(x+iy) = (x-2y)+i(2x+y)$ é diferenciável em todo o $\mathbb{C}$, e escreva-a como função de $z = x + iy$.

7. Mostre que para $f(x+iy) = x^3+i(1-y)^3$, a fórmula $f'(z) = u_x+iv_x = 3x^2$ só é válida para $z = i$.

8. Determine as partes reais e imaginárias das seguintes funções de variável complexa, e indique os pontos do plano complexo onde não possuem derivada.

a) $x^2 - y^2 + 2ixy$

b) $x^2 - y + i(x - y^2)$.

c) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{\bar{z}}$.

d) $ze^{\bar{z}}$

e) $\dfrac{z+3}{z+i}$

9. Mostre que $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Im} z^2|}$ verifica as equações de Cauchy-Riemann na origem, mas não possui derivada nesse ponto.

10. Considere a função complexa

$$f(z) = \begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^2} & \text{se } \operatorname{Re} z \neq 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{Re} z = 0. \end{cases}$$

a) Determine as partes real e imaginária de f.

b) Mostre que f possui derivada na origem, mas que a derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ não é contínua nesse ponto. (u designa a parte real de f e $x = \operatorname{Re} z$).

11. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (|z|^2 - 2)\bar{z}$.

a) Indique o conjunto de pontos do plano complexo onde f é diferenciável bem como o seu domínio de analiticidade.

b) Mostre que f aplica circunferências centradas na origem e de raio r em circunferências centradas na origem e raio r'. Se r for igual a 2 qual é o valor de r'?

12. Usando coordenadas polares ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$) mostre que as equações de Cauchy-Riemann para uma função $f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r},$$

e que a derivada de f em z_0 pode escrever-se na forma: $f'(z_0) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$.

Semana 3: Harmónicas conjugadas; integração em $\mathbb{C}$

1. Determine uma função harmónica conjugada v para as seguintes funções u:

a) $u(x,y) = \mathrm{Re}(z^3)$, com $z = x + iy$

b) $u(x,y) = e^{-y}\cos x$.

c) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

2. Sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, tais que $u = \mathrm{Re}(g)$ e $v = \mathrm{Im}(g)$ com $g(z) = z(z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2)$.

a) Determine o cojunto de pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. O que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g.

b) Mostre que u é uma função harmónica.

c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, diferenciável em $\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(f) = u$.

3. Considere o caminho γ_1, que consiste no segmento de recta que une, o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e o caminho γ_2 entre os pontos anteriores dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

a) Calcule usando a definição, $\int_{\gamma_k} z^2 dz$ para $k = 1, 2$.

b) Calcule $\int_{\gamma_k} z\bar{z} dz$ para $k = 1, 2$.

4. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$, com $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\left| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \pi \frac{R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}.$$

5. Calcule os integrais seguintes para as curvas percorridas no sentido anti-horário.

a) $\displaystyle\int_\Gamma e^{\cos^2 z} dz$, onde Γ é a curva $|z| = 1$.

b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{(z + \pi/2)^2} dz$, onde Γ é a curva $|z| = \pi$.

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{z(z-i)}dz$, onde Γ é a elipse $3x^2+2y^2=1$.

d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-i)^{10}}dz$.

e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{Re} z}{z-\frac{1}{2}}dz$.

f) $\displaystyle\int_{|z|=2\pi} \frac{1}{z^2+\pi^2}dz$.

6. Considere a função $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y)=x^3+y^3-3xy(x+y)$$

a) Mostre que u é uma função harmónica.

b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0,0)=0$.

c) Calcule $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz$, onde $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ e C é a curva $|z|=2$ percorrida no sentido positivo.

Semana 4: Séries de potências; Série de Taylor; Série de Laurent

1. Determine a região de convergência das seguintes séries de potências

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z-i)^n}{n^4+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n!)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(z+1)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}$

2. Determine o desenvolvimento de Taylor das funções seguintes em torno dos pontos indicados:

a) $\dfrac{1}{1-z}$, $z_0=2$.

b) $e^{3z}+\dfrac{3}{3+5z}$, $z_0=0$.

c) $z^2 e^z$, $z_0 = i\pi$

d) $\dfrac{3}{(z+2)^2}$, $z_0 = 1$

e) $\cosh z$, $z_0 = 0$

f) $\dfrac{1}{(z-i)^2}$, $z_0 = 0$.

3. Seja a um real tal que $|a| < 1$.

a) Determine a série de potências, de z, bem como a região de convergência de $\dfrac{a}{z-a}$.

b) Use a alínea anterior (tomando $z = e^{i\theta}$) para mostrar as expressões:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a\cos\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

4. Determine a série de potências de $(z - z_0)$ das funções seguintes

a) $\dfrac{z+1}{z(z-2)^2}$, $z_0 = 2$

b) $\dfrac{1}{z^2+1}$ $z_0 = i$

5. Determine a série de Laurent de $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ nas regiões seguintes

a) $0 < |z-1| < 2$ b) $2 < |z-1|$,

e aproveite o resultado para calcular os integrais $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz$ e $\displaystyle\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz$.

6. Determine a série de Laurent das funções seguintes nas regiões indicadas:

a) $\dfrac{z-1}{(z-2)^2}$, $|z-1| > 1$

b) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, em $(i)|z| < 1; (ii)\, 1 < |z| < 2; (iii)\, |z| > 2$

c) $\dfrac{e^z}{1+z^2}$, $|z| > 1$.

d) $z^4(e^{1/z} + z)$, $|z| > 0$

Semana 5: Singularidades; Teorema dos resíduos

1. Determine as singularidades das funções seguintes e calcule os respectivos resíduos.

a) $\dfrac{1}{(z^2+2)^2}$ b) $\dfrac{z^2+1}{1-z^4}$ c) $\dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^5}$

d) $\dfrac{(z-1)\sin(\frac{\pi}{2}z)}{(z^2-1)^2(z-2)}$ e) $z^4 \operatorname{sen} \dfrac{1}{z}$ f) $\dfrac{1}{e^z - 2i}$

g) $\dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$

2. Seja C uma curva fechada, simples, orientada no sentido positivo e f uma função analítica em C e que não se anula em C . Se Z é o número de zeros (contando a sua multiplicidade) e P o número de pólos de f no interior de C, mostre que

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(Z - P).$$

3. Seja f uma função analítica no ponto z_0. Mostre que a função $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ possui em z_0 uma singularidade removível caso $f(z_0) = 0$, e um pólo simples de resíduo $f(z_0)$ caso contrário.

4. Use o Teorema dos resíduos para calcular os integrais seguintes onde deve considerar as curvas simples e positivamente orientadas.

a) $\displaystyle\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1}$.

b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\pi - z)}$.

c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3}$.

d) $\displaystyle\oint_{|z|=8} \frac{1}{1+e^z}$.

e) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}$.

f) $\displaystyle\oint_{|z-2|=2} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}$.

5. Seja $f(z) = \dfrac{z \operatorname{sen} z}{\cos z - 1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z-4i)^{k-1}}$, e $D(f)$ o seu domínio de definição.

a) Classifique justificando, as singularidades de f e determine os respectivos resíduos.

b) Calcule os valores possíveis de $\displaystyle\oint_\gamma f(z)dz$, onde γ é uma curva simples, fechada e seccionalmente regular, contida na região

$$\{z \in \mathbb{C} : -3\pi < \operatorname{Re}(z) < 3\pi\} \cap D(f),$$

e tal que os pontos $\pm 2\pi$ estão contidos na região delimitada por γ.

6. Considere a função $f(z) = \dfrac{\pi \operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2}$. Use o Teorema dos resíduos para calcular o integral de f ao longo de um quadrado Q de vértices $(\pm 1 \pm i)(N + \frac{1}{2})$, onde N é tal que nenhum lado do quadrado contém qualquer singularidade de f. Além disso, sabendo que $\operatorname{cotg}(\pi z)$ é limitada para $z \in Q$ use o integral calculado para concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7. Estabeleça, usando o teorema dos resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração apropriado, os resultados seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}^2\theta} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3\theta)\, d\theta = 0.$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{12}$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}e^{-a}$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

8. Use o Teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_C \frac{z^4+1}{z^2(2z^2+5z+2)}dz,$$

onde C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, percorrida no sentido positivo. Aproveite este resultado para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5+4\cos\theta}d\theta.$$