Análise Matemática IV

Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 09/06/2005

Nome:____
Número:____ Curso:_______

Duração: *1H30M*
Cotação *das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 1.5v. Errada: -0,5v.*

A preencher pelo docente:

	Pergunta	Classificação	Cotação
	8		2
	9		2.5
	10		2.5
	11		2.5
EM-Cert.			
EM-Erra.			
	EM-Total		

Registo:	**Nota:**

---

1. Assinale uma equação diferencial que tenha solução dada por $\phi(t,x) = c$ (c constante), com $\phi(t,x) = t(t^2 + x) - \cos x$. **[1.5]**

☐ $(t + \operatorname{sen} x) + (3t^2 + x)\dfrac{dx}{dt} = 0$ ☐ $(t^2 + x) - \operatorname{sen} x\,\dfrac{dx}{dt} = 0$

☐ $(3t^2 + x) + (t + \operatorname{sen} x)\dfrac{dx}{dt} = 0$ ☐ $(t^2 + \operatorname{sen} x) + 3t^2\dfrac{dx}{dt} = 0$

---

2. Para o problema de valor inicial (P.V.I.) **[1.5]**

$$y' - t^2 y = 0; \quad y(0) = 1,$$

diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ O problema de valor inicial admite a função nula como solução.
☐ $e^{t^3/3}$ é a única solução do P.V.I.
☐ O Teorema de Picard não é aplicável ao P.V.I.
☐ $z(t) \equiv 1$ é uma solução do P.V.I.

---

3. Considere as equações diferenciais **[1.5]**

$$(1) \qquad \frac{t^3+1}{t}\,\frac{dy}{dt} - (y+1) = 0, \qquad\qquad t\,\frac{dy}{dt} = 10\sqrt{y}, \qquad (2)$$

e a seguinte lista de afirmações:

I. A equação (1) é uma equação diferencial separável.
II. A equação (1) é uma equação diferencial linear.
III. A equação (2) é uma equação diferencial exacta.
IV. A equação (2) é uma equação diferencial linear.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ II e III ☐ I e II ☐ I e II e III ☐ I e II e IV.

---

4. Considere a seguinte equação diferencial: **[1.5]**

$$y''' + y'' - 2y' = 0.$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & e^t & e^{-2t} \\ 0 & e^t & -2e^{-2t} \\ 0 & e^t & 4e^{-2t} \end{bmatrix}$ é uma matriz wronskiana para a equação.

☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz companheira da equação.

☐ A equação não admite soluções constantes.

☐ $\begin{bmatrix} e^t & 1 & te^t \\ e^t & 0 & (t+1)e^t \\ e^t & 0 & (t+2)e^t \end{bmatrix}$ é uma matriz wronskiana para a equação.

---

5. Sabendo que $e^{At} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, diga qual é a solução do problema **[1.5]**

$$y' = Ay + h(t) \text{ com } h(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

☐ $\begin{bmatrix} 1+(t-2)e^t \\ e^t \end{bmatrix}$. ☐ $\begin{bmatrix} -e^t \\ 1+t \end{bmatrix}$. ☐ $\begin{bmatrix} (t-2)e^{-t}+1 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$. ☐ $\begin{bmatrix} 2e^t - t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$.

---

6. Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então e^{At} é: **[1.5]**

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ☐ $\begin{bmatrix} e^t & 2t & t \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ☐ $\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ☐ $\begin{bmatrix} t & 2t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

---

7. A série de Fourier da função $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, é: **[1.5]**

☐ $\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi x)$. ☐ $\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi x]$.

☐ $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} \cos(2n\pi x)$. ☐ $\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \cos[(2n+1)\pi x]$.

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

8. Determine a solução do P.V.I. seguinte, e indique, justificando, qual o seu intervalo máximo de definição. **[2]**

$$y' + \frac{1}{1-t}\,y = (t-1); \;\; y(0) = 1.$$

9. Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule e^{At} e use o resultado para determinar a solução do problema $y' = Ay;\;\; y(0) = [1\ 1\ 0\ 1]^T$. **[2.5]**

10. Considere a função f definida em $[0, 2\pi]$ por $f(x) = e^{1+x}$. Determine a série de Fourier de f e indique para que valores converge a série obtida. **[2.5]**

11. Resolva o problema **[2.5]**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t, \qquad x \in]0, \pi[\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \\[2ex] u(x, 0) = 4 + \cos(2x) - 5\cos(3x) \end{cases}$$