Análise Matemática IV

Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
$1^{\underline{o}}$ Semestre — 27/04/2005

Nome:______________________________	
Número:______________________	Curso:________

Duração: 45 Minutos
Cotação das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 1 v. Errada: -0,3v.

A preencher pelo docente:

Correctas	Erradas	TEM	PD
Nota			

---

1. Considere a função complexa $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$ e as afirmações seguintes **[1]**

I. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} i\, z^n$ para $|z| > 1$.

II. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{i^n}{z^{n+1}}$ para $|z| > 1$.

III. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -i^{(n+1)}\, z^n$ para $|z| < 1$.

IV. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{i^n}{z^{n+1}}$ para $|z| < 1$.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ II e III ☐ I e IV ☐ I e III ☐ II e IV.

---

2. Sabendo que para $z \neq 0$ a série de Laurent de f é dada por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{i^{-(n+1)} z^{-n+1}}{(n-1)!}$, **[1]**
diga qual dos resultados seguintes é verdadeiro, onde a curva é simples e percorrida no sentido positivo.

☐ $\oint_{|z|=2} f(z)dz = 0$ ☐ $\oint_{|z|=2} f(z)dz = \pi$

☐ $\oint_{|z|=2} f(z)dz = -2\pi$ ☐ $\oint_{|z|=2} f(z)dz = \frac{-i}{2\pi}$

---

3. Para $f(z) = \dfrac{(2z+1)\sin(\pi z)}{(z-1)\cos^2(\pi z)}$, considere as afirmações seguintes. [**1**]

I. $f(z)$ tem um pólo duplo em $\frac{-1}{2}$.
II. $f(z)$ tem um pólo simples em 1.
III. $f(z)$ tem um pólo simples em $\frac{-1}{2}$.
IV. $f(z)$ tem uma singularidade removível em 1.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ III e IV ☐ I e II ☐ II e III ☐ I e IV

---

4. Nos integrais seguintes considere as curvas simples e percorridas no sentido positivo. [**1**]

$$A = \int_{|z|=1} \frac{\cos(\pi z)}{(z-\frac{1}{2})^2} dz, \qquad B = \int_{|z|=1} \frac{\cos(\pi z)}{2z-1} dz.$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ $A = -2\pi^2 i$ e $B = 0$.
☐ $A = 2\pi i$ e $B = 0$.
☐ $A = 2\pi i$ e $B = \pi i$.
☐ $A = 0$ e $B = 0$.

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

5. Use o Teorema dos resíduos para calcular $\displaystyle\int_{|z-2i|=2} \frac{(z-2i)^2}{(z-i)^2(z^2+4)} dz$, onde a curva é simples e percorrida no sentido positivo. [**2**]

6.

a) Use a fórmula de inversão da transformada de Laplace para calcular a transformada de Laplace inversa de $\dfrac{1}{s(s+1)}$. [**2**]

b) Use a transformada de Laplace para determinar a função $y(t)$ que verifica o problema seguinte. [**2**]

$$\begin{cases} y''' + y'' = g(t) \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = -1. \end{cases} \qquad \text{com} \qquad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \pi/2 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nota: Se necessário, deve usar o resultado da alínea anterior.