

Análise Matemática IV

Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química  
1º Semestre — 6/4/ 2005

Nome: _____
Número: _____ Curso: _____

**Duração:** 45 Minutos

**Cotação** das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 1 v. Errada: -0,3v.

*A preencher pelo docente:*

Correctas	Erradas	TEM	PD
Nota			

1. O conjunto das raízes da equação  $z^4 - 1 = 0$  é: [1]

$\{i, -1\}$      $\{i, -i\}$      $\{1, -1, i, -i\}$      $\frac{\sqrt{2}}{2} \{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\}$

2. Considere  $f(z) = z(z + \bar{z})$ , para  $z \in \mathbb{C}$ , e as afirmações seguintes [1]

- I.  $f$  é diferenciável em  $z = 0$  mas não é analítica neste ponto.
- II.  $f$  não é diferenciável em nenhum ponto  $z \in \mathbb{C}$ .
- III. A função  $u = \text{Re}(f)$  é uma função harmónica.
- IV. A função  $f$  é contínua em  $z = i$  logo é diferenciável neste ponto.

A lista completa de afirmações correctas é:

- III e IV       I e II e III       I e III e IV       I.

3. Seja  $f(z) = |z|^2 - \frac{\bar{z}^2}{2}$ . Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira [1]

- $z = 0$  é o único ponto em que  $f$  é diferenciável.
- $f$  é diferenciável em  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$ .
- $f$  não é diferenciável em nenhum  $z \in \mathbb{C}$ .
- $f$  é diferenciável em  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0\}$ .

4. Considere  $z \in \mathbb{C}$  e as afirmações seguintes: [1]

- I. A função  $\cos z$  é uma função limitada.
- II. A função  $e^z$  não é periódica.
- III.  $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$ .
- IV.  $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

A lista completa de afirmações correctas é:

- III e IV       I e III e IV       II e III e IV       I e III.
- 

5. Nos integrais seguintes considere as curvas simples e percorridas no sentido positivo. [1]

$$A = \int_{|z-1|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 1} dz, \quad B = \int_{|z-1|=1} \frac{z^2}{z^2 + 1} dz$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- $A = B = 0$ .
  - $A = e\pi i$  e  $B = 0$ .
  - $A = 0$  e  $B = \frac{\pi}{e}$ .
  - $A = \pi i \left( e - \frac{1}{e} \right)$  e  $B = -2\pi i$ .
- 

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

6. Seja  $C = C_1 + C_2$  a curva percorrida no sentido positivo, onde  $C_1$  é o arco da circunferência de centro em 1 e raio 1 com ponto inicial 2 e ponto final zero, e  $C_2$  o segmento de recta que une o ponto (inicial) zero ao ponto 2. Calcule [2]

$$\int_C \bar{z} dz.$$

7. Considere  $u(x, y) = e^x \cos y$ .

- a) Determine uma função analítica  $f$  que tenha  $u$  como parte real. [1.5]
- b) Para a função  $f$  obtida na alínea anterior, calcule  $\int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz$ , onde [1.5]  
a circunferência é percorrida uma só vez no sentido positivo.