Análise Matemática IV

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
2º Semestre — 18 Junho 2005

Nome:____
Número:____________________________ Curso:__________

Indique qual ou quais dos testes entrega:

1º Teste ☐ 1º Teste e 2º Teste ☐

2º Teste ☐

A preencher pelo aluno

Pergunta	Nº das pág. onde está a resolução
T1- 8	
T1- 9	
T1- 10	
T1- 11	
T2-18	
T2-19	
T2-20	
T2-21a)	
T2-21 b)	

A preencher pelo docente

Pergunta	Classificação	Cotação
8		2.5
9		2.5
10		2.5
11		2
18		2
19		2.5
20		2.5
21a)		2
21 b)		2
EM-Cert.		
EM-Erra.		
EM-Total		

Registo:	**Nota:**

Leia as instruções na página seguinte

Instruções

1º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 1 a 11

2º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 12 a 21.

1º Teste + 2º Teste (duração: 3h00m): Todas as perguntas.

Cotações: Perguntas de escolha múltipla: Certa: **1.5val.** Errada: **- 0.5val.** Para quem entregar o 1º Teste e o 2º Teste a classificação será dada pela média: $(T1 + T2)/2$.

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- As perguntas de escolha múltipla devem ser respondidas neste enunciado, e as perguntas de desenvolvimento em caderno separado.
- **Identifique** e **numere** as páginas do seu caderno de respostas. Se **interromper** uma resposta, **indique**, no sítio onde a interrompeu, o número da página onde vai continuar a resolução.
- Antes de entregar o teste certifique-se que a **tabela da esquerda** (página anterior) está bem preenchida. Nesta tabela marque com um **traço** as linhas correspondentes às perguntas a que não respondeu. Certifique-se ainda que assinalou qual ou quais dos testes respondeu.

Início do 1º Teste

1. Considere as afirmações, relativas à equação **[1.5]**

$$e^{2z} - 1 = 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

I. $z = 0$ é a única raíz da equação.
II. Todas as raízes da equação pertencem ao eixo imaginário.
III. A equação só tem raízes reais.
IV. A equação tem um número infinito de raízes.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ III e IV ☐ II e IV ☐ I e III

---

2. Considere a função complexa definida por $f(z) = \bar{z}(|z|^2 - 8)$ e a seguinte lista de afirmações: **[1.5]**

I. f não é analítica.
II. As equações de Cauchy Riemann para f verificam-se em $z = 0$.
III. f é diferenciável em $z = 2i$.
IV. f é diferenciável em todos os pontos da circunferência $|z|^2 = 1$

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ I e III ☐ II e IV ☐ I e IV.

---

3. Supondo que a elipse Γ, dada por $3x^2 + 5(y-1)^2 = 1$, é percorrida uma só vez no sentido positivo, então os valores de **[1.5]**

$$A = \int_\Gamma \frac{1}{z(z-i)}\,dz \qquad \text{e} \qquad B = \int_\Gamma e^{\operatorname{sen}^2 z}\,dz$$

são:
☐ $A = B = 0$ ☐ $A = 2\pi$ e $B = 0$ ☐ $A = i$ e $B = 0$ ☐ $A = 0$ e $B = 1$

---

4. Para $f(z) = \dfrac{(z - \pi/2) + \cos z}{(z - \pi/2)^3}$, diga qual das afirmações seguintes é verdadeira. **[1.5]**
☐ $f(z)$ tem um pólo simples em $\frac{\pi}{2}$.
☐ $f(z)$ tem uma singularidade removível em $\frac{\pi}{2}$.
☐ $f(z)$ tem um pólo de ordem 3 em $\frac{\pi}{2}$.
☐ $f(z)$ tem um pólo de ordem 4 em $\frac{\pi}{2}$.

5. Seja $f(z) = \sum_{n=-3}^{+\infty} (-2ni)(z-2\pi)^n$. Considere as afirmações **[1.5]**

I. $\mathrm{Res}(f; 2\pi) = 0$.
II. A função $(z-2\pi)f(z)$ tem um pólo duplo em $z = 2\pi$.
III. $(z-2\pi)f(z)$ tem um pólo simples em $z = 2\pi$.
IV. $\mathrm{Res}(f; 2\pi) = 2i$.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ I e III ☐ II e IV ☐ III e IV.

---

6. A função que tem transformada de Laplace $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2}$, é: **[1.5]**

☐ $f(t) = 1 + t$. ☐ $f(t) = 1 + 2t$. ☐ $f(t) = \operatorname{sen} t$. ☐ $f(t) = \cos(t)$.

---

7. No integral seguinte considere a curva simples e percorrida no sentido positivo. **[1.5]**

$$A = \int_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^2}{(z-i)^2(z^2-1)^2} dz.$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ $A = \dfrac{2\pi}{(1-i)}$. ☐ $A = 0$. ☐ $A = \dfrac{\pi}{(i-1)}$. ☐ $A = \dfrac{\pi i}{2}$.

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

8. Calcule o integral **[2.5]**

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\mathrm{Im}\, z}{z-1}\, dz,$$

onde a curva é simples e percorrida no sentido positivo.

9. Determine a série de Laurent de $\dfrac{z+i}{(z+2i)^2}$ na região $|z+i| > 1$. **[2.5]**

10. Use o Teorema dos resíduos para calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \operatorname{sen}\theta}$. **[2.5]**

v.s.f.

11. Use a transformada de Laplace para determinar a função $y(t)$ que verifica o problema seguinte. **[2]**

$$\begin{cases} y'' + y = t \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{FIM do } 1^{\underline{o}} \textbf{ Teste}}$

Início do 2º Teste

12. Considere a lista de afirmações seguintes para a equação diferencial **[1.5]**

$$(2x^2 - 3tx) + (3tx - 2t^2)\frac{dx}{dt} = 0. \quad (1)$$

I. A equação diferencial (1) é exacta.
II. Qualquer solução de (1) verifica a equação $\phi = c$ (c constante), para $\phi(t, x) = tx$.
III. $\mu = tx$ é um factor integrante para (1).
IV. A equação admite um factor integrante que é unicamente função de t.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ II e III ☐ III ☐ II e IV ☐ I e III e IV.

---

13. Considere o problema de valor inicial (P.V.I.) seguinte **[1.5]**

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2(t^3 - 1)}{y} \\ y(2) = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

O Teorema de Picard garante que o P.V.I. tem solução única numa vizinhança de $(2, 2\sqrt{2})$. O intervalo máximo de definição desta solução é:

☐ $]\sqrt[3]{4}, +\infty[$ ☐ $]-\infty, 2[$ ☐ $]\sqrt[3]{4}, 2[$ ☐ $]2, +\infty[$

---

14. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Então e^{At} é: **[1.5]**

☐ $\begin{bmatrix} e^{2t} & 3(e^{2t} - e^t) \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} e^{t} & 3(e^{2t} - e^t) \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 3(e^{2t} - e^t) & e^t \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} - e^t \\ 3(e^{2t} - e^t) & e^{2t} \end{bmatrix}$

---

15. Seja $W(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} & e^{-2x} \\ e^x & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ e^x & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \end{bmatrix}$ uma matriz wronskiana de uma equação diferencial homogénea. Então, a equação é: **[1.5]**

☐ $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$ ☐ $y^{(3)} - 2y'' + y' + 2 = 0$

☐ $y^{(3)} - y'' - 4y' + 4y = 0$ ☐ $y^{(3)} - 2y'' + 4y = 0$

16. O desenvolvimento em série de cosenos da função $f(x) = x$ definida em $[0, 1]$ converge pontualmente para **[1.5]**

☐ $SC_f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in]-1, 1[\\ 2 & \text{se} \quad x = 1, -1 \end{cases}$ ☐ $SC_f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{se} \quad x = 1, -1 \end{cases}$

☐ $SC_f(x) = x$ para $x \in [-1, 1]$ ☐ $SC_f(x) = |x|$ para $x \in [-1, 1]$

---

17. Seja f e g, definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$, dadas por **[1.5]**

$$g(x) = x^{10}\,|x|, \qquad f(x) = x^4(x - x^3).$$

Considere a seguinte lista de afirmações:

I. A série de Fourier de f é uma série de senos.
II. A série de Fourier de f é uma série de cosenos.
III. A série de Fourier de g é uma série de senos.
IV. A série de Fourier de g é uma série de cosenos.

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e III ☐ I e IV ☐ II e III ☐ II e IV

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

18. Determine a solução geral da equação diferencial linear seguinte **[2]**

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{1+t^2}\,y = \frac{1}{1+t^2}.$$

19. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule e^{At} e use o resultado para determinar a solução do problema $y' = Ay + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$; $y(0) = [1 \;\; 1]^T$. **[2.5]**

20. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial **[2.5]**

$$y'' + 5y' = (t+1)e^t.$$

21. Considere a função f definida em $[0, \pi]$ por $f(x) = x - 1$.

a) Determine a série de cosenos de f . **[2]**

b) Resolva o problema: **[2]**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2tu, \qquad x \in]0,\pi[\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

FIM