**Análise Matemática IV**

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 2004/05

$\boxed{\text{Semana 8}}$

**1.** Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{t^2+3y^2}{2ty} \quad , \quad t>0 \quad \text{e} \quad y>0$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.
**Sugestão:** Considere a mudança de varável $v = y/t$.

**2.** Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0, \qquad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

**3.** Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x,y) = C$, onde $C$ é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

**4.** Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2+2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

**5.** Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \operatorname{sen}(t) + x' = 0 \tag{2}$$

a) Mostre que a equação (2) não é exacta.

b) Determine em que condições uma equação na forma

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0$$

admite um factor integrante que é uma função de $t$, isto é, da forma $\mu(t)$, para uma certa função real de variável real $\mu$, e escreva uma equação diferencial ordinária satisfeita por $\mu$.

c) Determine a solução da equação (2) que satisfaz a condição inicial $x(\pi) = 1$, e indique o intervalo máximo de definição da solução.

**6.** Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3}$$

a) Mostre que (3) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (3) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto $-1$, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

**7.** Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

(a) $y' = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$ , (b) $y' = (2-y)\,(y-1)$,

(c) $y' = y\,(1-y^2)$ , (d) $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$ ,