

Análise Matemática IV

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 2004/05

Semana 7

1. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \frac{dy}{dt} = e^t y & \text{b)} \quad \psi' = \psi - t \\ \text{c)} \quad \frac{dy}{dt} + y \operatorname{sen} t = 0 & \text{d)} \quad \frac{di}{dt} - 6i = 10 \operatorname{sen}(2t) \\ \text{e)} \quad y'(x) = 2xy(x) + x & \text{f)} \quad (1 + y^2) \frac{dx}{dy} = \operatorname{arctg} y - x \\ \text{g)} \quad w' = \frac{2t}{t^2 + 1} w + t^2 - 1. \end{array}$$

2. Determine a solução dos problemas de valor inicial seguintes e indique qual o seu intervalo máximo de definição.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad L \frac{dI}{dt} + RI = V, I(0) = 0. \\ \text{b)} \quad \frac{dy}{dt} + \sqrt{1 - t^2} y = 0, y(0) = e^2. \\ \text{c)} \quad y' = 2ty + t, y(0) = 1. \\ \text{d)} \quad \frac{dv}{du} + \frac{2u}{1 + u^2} v - \frac{1}{1 + u^2} = 0, v(0) = 1. \\ \text{e)} \quad x' + h(t)x - t = 0, x(-1) = 2, \text{ com } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}. \end{array}$$

3. Considere uma equação diferencial da forma $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$.

a) Mostre que se fizer a mudança de variável $x = \frac{y}{t}$ a equação dada se reduz a uma equação separável.

b) Use a alínea anterior para determinar a solução geral da equação:

$$t^2 \frac{dy}{dt} = 2ty + y^2.$$

4. A temperatura T de uma sala aquecida decresce a razão de 0,008 vezes a diferença entre a temperatura actual e a temperatura exterior fixa a 15 graus. Sabendo que no instante inicial $t = 0$ a temperatura da sala era 25 graus determine ao fim de que tempo a temperatura da sala atinge 18 graus.

5. Uma dada cultura de bactérias duplica de tamanho ao fim de 10 minutos. Se a cultura tem 100 indivíduos no instante inicial $t = 0$ ao fim de quanto tempo atinge 3000?

6. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

a) $u' = \frac{1}{2}(u^2 - 1).$

b) $x^3 + (y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$

c) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$

d) $\phi' = e^{\phi - 2t}$

7. Considere a equação diferencial separável $x' = x \sin t + x^2 \cos t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e o seu intervalo máximo de existência.

8. Determine a solução dos problemas de valor inicial seguintes, indicando o intervalo máximo de existência de cada solução

a) $y' \cos y = \frac{-t \cos y}{1 + t^2}, y(1) = \pi/2.$

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{x - xt^2}, x(2) = 3$