Análise Matemática IV

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 2004/05

Semana 6: Aplicações do Teorema dos resíduos: Transformada de Laplace; cálculo de integrais

1. Calcule a transformada de Laplace das funções seguintes.

a) $f(t) = 1$ b) $f(t) = t^n$ c) $f(t) = e^{-at}$

d) $f(t) = \cos(wt)$ e) $f(t) = \mathrm{sen}(wt)$ f) $f(t) = t^2 e^{at}$

2. Determine a transformada de Laplace inversa das seguintes funções.

a) $\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$.

b) $\dfrac{2s}{s^4-1}$.

c) $\dfrac{1}{(s^2-1)^2}$.

3. Use a Transformada de Laplace para resolver, para $t > 0$, as seguintes equações diferenciais:

a) $\begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y''' - 4\pi y'' + 3\pi^2 y' = 10\pi^3 \cos(\pi t) \\ y(0) = 4, y'(0) = 4\pi, y''(0) = 7\pi^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + 4y = H(t-\pi) - H(t-2\pi) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

Nota: H designa a função de Heaviside.

4. Estabeleça, usando o teorema dos resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração apropriado, os resultados seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}^2\theta} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3\theta)\, d\theta = 0.$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{2+\cos(\frac{\pi x}{2})}\, dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{12}$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}e^{-a}$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

5. Use o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_C \frac{z^4+1}{z^2(2z^2+5z+2)} dz,$$

onde C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, percorrida no sentido positivo. Aproveite este resultado para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5+4\cos\theta} d\theta.$$