Análise Matemática IV

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 2004/05

Semana 5: Singularidades; Teorema dos resíduos

1. Determine as singularidades das funções seguintes e calcule os respectivos resíduos.

a) $\dfrac{1}{(z^2+2)^2}$ b) $\dfrac{z^2+1}{1-z^4}$ c) $\dfrac{z-\operatorname{sen} z}{z^5}$

d) $\dfrac{(z-1)\sin(\frac{\pi}{2}z)}{(z^2-1)^2(z-2)}$ e) $z^4 \operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$ f) $\dfrac{1}{e^z-2i}$

g) $\operatorname{cotg}(z)$ h) $\dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$

2. Seja C uma curva fechada, simples, orientada no sentido positivo e f uma função analítica em C e que não se anula em C . Se Z é o número de zeros (contando a sua multiplicidade) e P o número de pólos de f no interior de C, mostre que

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(Z-P).$$

3. Seja f uma função analítica no ponto z_0. Mostre que a função $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ possui em z_0 uma singularidade removível caso $f(z_0) = 0$, e um pólo simples de resíduo $f(z_0)$ caso contrário.

4. Use o Teorema dos resíduos para calcular os integrais seguintes onde deve considerar as curvas simples e positivamente orientadas.

a) $\displaystyle\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1}.$

b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\pi-z)}.$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3}$.

d) $\displaystyle\oint_{|z|=8} \frac{1}{1 + e^z}$.

e) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}$.

f) $\displaystyle\oint_{|z-2|=2} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}$.

5. Seja $f(z) = \dfrac{z \operatorname{sen} z}{\cos z - 1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z-4i)^{k-1}}$, e $D(f)$ o seu domínio de definição.

a) Classifique justificando, as singularidades de f e determine os respectivos resíduos.

b) Calcule os valores possíveis de $\displaystyle\oint_\gamma f(z)dz$, onde γ é uma curva simples, fechada e seccionalmente regular, contida na região

$$\{z \in \mathbb{C} : 3\pi < \operatorname{Re}(z) < 3\pi\} \cap D(f),$$

e tal que os pontos $\pm 2\pi$ estão contidos na região delimitada por γ.

6. Considere a função $f(z) = \dfrac{\pi \operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2}$. Use o Teorema dos resíduos para calcular o integral de f ao longo de um quadrado Q de vértices $(\pm 1 \pm i)(N + \frac{1}{2})$, onde N é tal que nenhum lado do quadrado contém qualquer singularidade de f. Além disso, sabendo que $\operatorname{cotg}(\pi z)$ é limitada para $z \in Q$ use o integral calculado para concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.