**Análise Matemática IV**

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 2004/05

Semana 4: Séries de potências; Série de Taylor; Série de Laurent

**1.** Determine a região de convergência das seguintes séries de potências

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z-i)^n}{n^4+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n!)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^n (3z+2i)^{2^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}$

**2.** Determine o desenvolvimento de Taylor das funções seguintes em torno dos pontos indicados:

a) $\dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 2$.

b) $e^{3z} + \dfrac{3}{3+5z}$, $z_0 = 0$.

c) $\displaystyle\int_1^z e^w dw$, $z_0 = 0$

d) $\dfrac{3}{(z+2)^2}$, $z_0 = 1$

e) $\cosh z$, $z_0 = 0$

f) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{z}{3}\right)$, $z_0 = 0$

g) $\dfrac{1}{(z-i)^2}$, $z_0 = 0$.

**3.** Seja $a$ um real tal que $|a| < 1$.

a) Determine a série de potências, de $z$, bem como a região de convergência de $\dfrac{a}{z-a}$.

b) Use a alínea anterior (tomando $z = e^{i\theta}$) para mostrar as expressões:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a\cos\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

**4.** Determine a série de potências de $(z - z_0)$ das funções seguintes

a) $\dfrac{z+1}{z(z-2)^2}, \ z_0 = 2$

b) $\dfrac{1}{z^2+1} \ z_0 = i$

**5.** Determine a série de Laurent de $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ nas regiões seguintes

$$\text{a) } 0 < |z-1| < 2 \qquad \text{b) } 2 < |z-1|,$$

e aproveite o resultado para calcular o integral $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz$.

**6.** Determine a série de Laurent das funções seguintes nas regiões indicadas:

a) $\dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)^2}, \ 0 < |z| < 1$

b) $\dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)^2}, \ 1 < |z| < 2$

c) $\dfrac{1}{1-z+z^2}$, em potências de $(z-1), \ 0 < |z-1| < 1$

d) $\dfrac{e^z}{1+z^2}, \ |z| > 1$.