Análise Matemática IV

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 2004/05

Semana 3: Harmónicas conjugadas; integração em $\mathbb{C}$

1. Determine uma função harmónica conjugada v para as seguintes funções u:

a) $u(x,y) = \mathrm{Re}(z^3)$, com $z = x + iy$

b) $u(x,y) = e^{-y}\cos x$.

c) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

2. Sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, tais que $u = \mathrm{Re}(g)$ e $v = \mathrm{Im}(g)$ com $g(z) = z(z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2)$.

a) Determine o cojunto de pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. O que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g.

b) Mostre que u é uma função harmónica.

c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, diferenciável em $\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(f) = u$.

3. Considere o caminho γ_1, que consiste no segmento de recta que une, o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e o caminho γ_2 entre os pontos anteriores dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

a) Calcule usando a definição, $\int_{\gamma_k} z^2 dz$ para $k = 1, 2$.

b) Calcule $\int_{\gamma_k} z\bar{z} dz$ para $k = 1, 2$.

4. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$, com $0 \le t \le \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\left| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \le \pi \frac{R(2R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)}.$$

5. Calcule os integrais seguintes para as curvas percorridas no sentido anti-horário.

a) $\displaystyle\int_\Gamma e^{\cos^2 z} dz$, onde Γ é a curva $|z| = 1$.

b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{(z+\pi/2)^2} dz$, onde Γ é a curva $|z| = \pi$.

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{z(z-i)} dz$, onde Γ é a elipse $3x^2 + 2y^2 = 1$.

d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-i)^{10}} dz.$

e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{Re} z}{z - \frac{1}{2}} dz.$

f) $\displaystyle\int_{|z|=2\pi} \frac{1}{z^2 + \pi^2} dz.$

6. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

a) Mostre que u é uma função harmónica.

b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0, 0) = 0$.

c) Calcule $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$, onde $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ e C é a curva $|z| = 2$ percorrida no sentido positivo.