Análise Matemática IV

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 2004/05

Semana 2: Limites, continuidade e diferenciabilidade; funções elementares;

1. Estude quanto à convergência as seguintes sucessões complexas.

a) $\dfrac{i^n}{n}$.

b) $\dfrac{(-1)^n n}{n+i}$.

c) $\dfrac{n^2+in}{n^2+i}$.

2. Calcule as soluções das equações seguintes

a) $e^{(2z-1)}=1$.

b) $\cos z=2$.

c) $\operatorname{senh}(z)=i$

3. Para $z,w\in\mathbb{C}$, estabeleça as identidades seguintes:

a) $\cos(iz)=\cosh(z)$.

b) $\operatorname{sen}^2 z+\cos^2 z=1$.

c) $\operatorname{sen}(z+w)=\operatorname{sen} z\cos w+\cos z\operatorname{sen} w$

4. Para cada um dos conjuntos $Z\subset\mathbb{C}$, represente geometricamente o conjunto dos seus logarítmos, i.e. o conjunto

$$W=\{w\in\mathbb{C}:\, e^w\in Z\}.$$

a) $Z=\{z\in\mathbb{C}:\Re(z)>0,\operatorname{Im}(z)<0\}$

b) $Z=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=e,\,\frac{\pi}{4}\le\arg(z)\le\frac{3\pi}{4}\right\}$

5. Determine as partes reais e imaginárias das seguintes funções de variável complexa, e indique os pontos onde são contínuas.

a) $z|z|$.

b) $\dfrac{1}{2z+3i}$

c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$

6. Mostre que a função complexa definida por $f(x+iy) = (x-2y)+i(2x+y)$ é diferenciável em todo o $\mathbb{C}$, e escreva-a como função de $z = x+iy$.

7. Mostre que para $f(x+iy) = x^3+i(1-y)^3$, a fórmula $f'(z) = u_x+iv_x = 3x^2$ só é válida para $z = i$.

8. Determine as partes reais e imaginárias das seguintes funções de variável complexa, e indique os pontos do plano complexo onde não possuem derivada.

a) $x^2 - y^2 + 2ixy$

b) $x^2 - y + i(x - y^2)$.

c) $z(e^{iz} - e^{-iz})$.

d) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{\bar{z}}$.

e) $ze^{\bar{z}}$

f) $\dfrac{z+3}{z+i}$

9. Mostre que $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Im} z^2|}$ verifica as equações de Cauchy-Riemann na origem, mas que f não possui derivada nesse ponto.

10. Considere a função complexa

$$f(z) = \begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^2} & \text{se } \operatorname{Re} z \neq 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{Re} z = 0. \end{cases}$$

a) Determine as partes real e imaginária de f.

b) Mostre que f possui derivada na origem, mas que a derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ não é contínua nesse ponto. (u designa a parte real de f e $x = \operatorname{Re} z$).

11. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (|z|^2 - 2)\bar{z}$.

a) Indique o conjunto de pontos do plano complexo onde f é diferenciável bem como o seu domínio de analiticidade.

b) Mostre que f aplica circunferências centradas na origem e de raio r em circunferências centradas na origem e raio r'. Se r for igual a 2 qual é o valor de r'?

12. Usando coordenadas polares ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$) mostre que as equações de Cauchy-Riemann para uma função $f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r},$$

e que a derivada de f em z_0 pode escrever-se na forma: $f'(z_0) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$.