Análise Matemática IV

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica, Eng. Química, Química
2º Semestre — 2004/05

Semana 1: Números complexos

1. Escreva os números complexos seguintes na forma cartesiana (i.e $x + iy$).

a) $(3 - i)(3 + i)(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i)$.

b) $e^{5\pi i/6}$.

c) $\dfrac{10}{(2 - i)(i - 1)(i - 3)}$.

d) i^{13}

e) $\left(\sqrt{3} + i\right)^7$.

2. Escreva na forma polar (i.e $\rho e^{i\theta}$) os números complexos seguintes.

$$i - 1, \quad \sqrt{3} - i, \quad (\cos\frac{1}{3} - i\,\sin\frac{1}{3})^2, \quad (1 + i\sqrt{3})^n.$$

3. Calcule e represente geométricamente os números complexos seguintes:

a) $\sqrt[3]{-i}$

b) $\sqrt[4]{-1}$

c) $\sqrt{1 + i}$

d) $\sqrt[4]{64 + 64\sqrt{3}i}$.

4. Mostre que para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ se verificam as desigualdades:

a) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad \text{e} \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

b) $|w + z| \leq |w| + |z|$.

c) $||w| - |z|| \leq |w + z|$.

5. Use o problema anterior para mostrar que se z pertence à circunferência de centro na origem e raio 2 então$\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right| \leq \frac{1}{3}$ (Sugestão: Factorize o polinómio do denominador em factores quadráticos).

6. Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo.

a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Im}(z-i) < 2\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < |z+1|\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z \leq \pi/3,\ z \neq 0\}$.

d) $\{z \in \mathbb{C} : z = 2i + 3\cos\theta + 3i \operatorname{sen}\theta,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

e) $\{z \in \mathbb{C} : z = i + (2-i)t,\ t \in \mathbb{R}\}$.

f) $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| + |z+3-2i| < 3\}$.

g) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-2i|\}$.

7. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) $(1+z)^3 = 1$.

c) $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$

d) $|e^{i\theta} - 1| = 2, \theta \in \mathbb{R}$ (interprete geometricamente)

8. Mostre que se z_1, z_2 e $z_1 + z_2$ têm módulo 1 então o ângulo entre z_1 e z_2 é $\pm\frac{2\pi}{3}$.