

Álgebra Linear

Cursos: MEEC, MAmb, LMat, LQ, LEIC-A, MEQ
2ºS — 2007/08

6ª Lista: Transformações Lineares

1. Diga, justificando, quais das seguintes funções são lineares.

- (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$
- (b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$.
- (c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$.
- (d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$.
- (e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$.
- (f) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 5x_2)$.

2. Considere os vectores v_1, v_2 e v_3 do espaço linear W , e $T : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(v_1) = (1, -1, 2)$, $T(v_2) = (0, 3, 2)$, $T(v_3) = (-3, 1, 2)$. Determine $T(3v_1 - v_2 + 10v_3)$.

3. Determine a matriz que representa cada uma das transformações lineares abaixo, em relação à base canónica no espaço de partida e à base canónica no espaço de chegada.

- (a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
- (b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.
- (c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$.
- (d) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$.
- (e) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$.

4. Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear, U e V espaços lineares.

- (a) Mostre que $T(0) = 0$.
- (b) Conclua que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $T(x, y) = (2x - y, x + y + 1, x)$, não é uma transformação linear.

5. Defina cada uma das transformações lineares T seguintes na forma $T(X) = AX$, onde A é uma matriz. Use a matriz A para obter as imagens por T do triângulo I de vértices $(-1, 2)$, $(0, 0)$ e $(1, 1)$, onde T é :

- (a) A reflexão em relação ao eixo dos xx ;
- (b) A reflexão em relação à recta $y = x$;
- (c) A projecção ortogonal sobre a recta $y = -x$.
- (d) A rotação em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$.

6. Defina cada uma das transformações lineares T seguintes na forma $T(X) = AX$, onde A é uma matriz. Use a matriz A para obter as imagens por T do triângulo I de vértices $(-1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 0, 1)$, onde T é :

- (a) A reflexão em relação ao plano xz ;
- (b) A rotação em torno do eixo dos zz , no sentido positivo, de um ângulo de $\pi/2$.

7. Seja $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (-1, 4)$, e $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ a matriz que representa a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em relação à base ordenada $B = (v_1, v_2)$.

- (a) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base B .
- (b) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$.
- (c) Encontre a matriz que representa T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, e encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2)$.
- (d) Use a fórmula obtida em (c) para calcular $T(1, 1)$.

8. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, a base canónica $BC = (e_1, e_2, e_3)$, e a base ordenada $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (0, 0, 1))$.

- (a) Determine a matriz F que realiza a mudança de base de BC para $\mathcal{B}$, isto é tal que $x_{\mathcal{B}} = Fx_{BC}$.
- (b) Dado um vector $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, isto é, de coordenadas (x_1, x_2, x_3) na base BC , determine as suas coordenadas (y_1, y_2, y_3) na base $\mathcal{B}$.
- (c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuja representação matricial

na base canónica é $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$.

9. Seja V o espaço linear real das matrizes reais 2×2 , de entradas a_{ij} , satisfazendo $a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{12} + a_{21} = 0$. Considere as seguintes matrizes de V :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V .
- (b) Dada a transformação linear $T : V \rightarrow V$ definida por

$$T(H) = J, \quad T(J) = -H,$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base que contenha H e J .

- (c) Determine a dimensão do núcleo de T , e diga (justificando) se T é invertível.

10. Diga, justificando, em que casos se tem $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$:

- (a) T_1 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx e T_2 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos yy ;
- (b) T_1 é a reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos xx e T_2 é a reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos yy ;

11. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2).$$

- (a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.
- (b) Indique um vector de $\mathbb{R}^2$ que não esteja na imagem da transformação.
- (c) Verifique o teorema da dimensão.

12. Seja $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ o espaço das matrizes 2×2 . Seja $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ a aplicação $T(A) = A + A^t$.

- (a) Mostre que T é uma transformação linear.
- (b) Determine a matriz K que representa T em relação à base ordenada

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$.

- (c) Determine bases para o núcleo e para a imagem de T .
- (d) Diga, justificando, se T é injectiva ou sobrejectiva.
- (e) Sendo $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ determine $T^{-1}(M)$.

Observação: Dada uma função $f : A \rightarrow B$ e $b \in B$, define-se a imagem completa inversa de b como sendo $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$. Note que o conjunto $f^{-1}(b)$ está definido mesmo que não exista a função inversa de f .

13. Indique o valor lógico das seguintes proposições:

- (a) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
- (b) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
- (c) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
- (d) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
- (e) Existem transformações lineares injectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2 .
- (f) Existem transformações lineares sobrejectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2 .
- (g) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^4$ é sobrejectiva.
- (h) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^5$ é sobrejectiva.
- (i) Existe uma transformação linear bijectiva do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o das matrizes 2×2 .

Exercícios de escolha múltipla

14. Considere $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x, y, z) = (x + 1, y, 2z + x), \quad S(x, y, z) = (2x, y - z).$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- ☐ S e T são transformações lineares.
- ☐ $S \circ T$ não é uma transformação linear.
- ☐ O espaço de chegada de $S \circ T$ é $\mathbb{R}^3$.
- ☐ T é uma transformação linear invertível.

15. Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear e $B = (u, v, w)$ uma base ordenada para V , tal que $T(u - v) = 2u$, $T(2u + v) = v$ e $T(w) = u - v + w$. Então a matriz que representa T em relação à base B no espaço de partida e de chegada é:

- | | |
|---|--|
| ☐ $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | ☐ $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| ☐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1, 1, 0) = (2, 1) \quad T(0, 1, 1) = (1, 1) \quad T(1, 0, 0) = (1, 1).$$

Então,

$$\square T(x, y, z) = (x + y, x + z)$$

$$\square T(x, y, z) = (y - x, x + 2z)$$

$$\square T(x, y, z) = (2z + x + y, x - z)$$

$$\square T(x, y, z) = (2x, x + z)$$
