

Álgebra Linear

Cursos: MEEC, MAmb, LMat, LQ, LEIC-A, MEQ
2ºS — 2007/08

6ª Lista:

Ortogonalidade.

Tópico I: Mínimos quadrados

Nos exercícios onde não é especificado qualquer produto interno, considere o produto interno usual (Euclidiano) de $\mathbb{R}^n$.

Produto interno em $\mathbb{R}^n$: Noções básicas

1. Para os vectores $u = (4, 1, 4, 5)$, $v = (1, 2, 0, 2)$, calcule as expressões:

(a) $\|u+v\|$ (b) $\|u\|+\|v\|$ (c) $-3\|u\|+\|3u\|$ (d) $\frac{1}{\|v\|}v$ (e) $\left\|\frac{1}{\|v\|}v\right\|$ (f) $\angle(u, v)$.

2. Diga para que valores de k os vectores seguintes são ortogonais:

(a) $u = (2, 1, 3)$, $v = (k, 1, 2)$ (b) $u = (2, 1, 3, 4)$, $v = (k, -1, 2k, 1)$.

3. Verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os seguintes vectores.

(a) $u = (-3, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 3)$ (b) $u = (-4, 2, 1, 6, -1)$ e $v = (8, -4, -2, 2, 1)$

4. Determine todos os vectores u de $\mathbb{R}^2$ tais que o ângulo que u faz com o vector $(1, 2)$ é de $\frac{\pi}{3}$ radianos e $\|u\| = 1$.

5. Para $u, v \in \mathbb{R}^n$ mostre a igualdade

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Dê uma interpretação geométrica desta igualdade para vectores de $\mathbb{R}^2$.

6. Mostre que se u e v são vectores ortogonais tais que $\|u\| = 1$ e $\|v\| = 2$ então a distância de u a v é $d(u, v) = \sqrt{5}$. Interprete geometricamente este resultado para vectores de $\mathbb{R}^2$.

7. Sejam $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ e $y = (\frac{2}{\sqrt{k}}, \frac{2}{\sqrt{k}})$. Diga para que valores de $k \neq 0$ o conjunto $\{x, y\}$ é um conjunto ortonormado.

8. Designe por $\text{proj}_v u$ a projecção ortogonal do vector u sobre o vector v . Calcule $\text{proj}_{(1,2,3)}(3, 0, 1)$, $\text{proj}_{(1,2,3)}(-\pi, -2\pi, -3\pi)$ e $\text{proj}_{(1,2,3)}(-2000, 1000, 0)$.

Complementos ortogonais

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Sem efectuar quaisquer cálculos, justifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

- $\dim EL(A) + \dim N(A^T) = 4$.
- $\dim EC(A) + \dim N(A^T) = 4$.

(b) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de A .

(c) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de A^T .

10. Mostre que para uma matriz real A , $n \times k$, se verifica a seguinte igualdade entre núcleos:

$$N(A) = N(A^T A).$$

11. Encontre uma base para o complemento ortogonal do subespaço U , dado por

- (a) $U = \text{Span}((1, 1, -1, -1, 1), (1, 2, 3, 4, 1), (2, 1, -6, -7, 1))$.
 (b) $U = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (2, 4, 6, 8))$.

12. Seja W o plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $x - 2y + z = 0$. Encontre uma equação para $W^\perp$.

13. Determine uma equação para

- (a) a recta que passa pelos pontos $(2, 2, 0)$ e $(1, 2, 1)$.
 (b) o plano que passa por $(1, 1, -1)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

14. Determine a distância de $(2, 0, 1)$ ao plano $x - 2y - z = 0$, bem como o vector do plano mais próximo de $(0, 2, 1)$.

15. Seja W a recta de $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações paramétricas $x = 2t, y = -t, z = 4t$ ($-\infty < t < \infty$). Determine uma equação para $W^\perp$.

16. Considere o subespaço W de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $u_1 = (0, 1, 0)$ e $u_2 = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$.

Exprima $w = (1, 2, 3)$ na forma $w = w_1 + w_2$, em que $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^\perp$.

17. Prove que as colunas de uma matriz A , $m \times n$, são ortogonais se e só se $A^T A$ é uma matriz diagonal, e são ortonormais se e só se $A^T A$ é a matriz identidade. A uma matriz com esta última propriedade chama-se matriz ortogonal.

18. Seja A uma matriz real, $n \times n$. Mostre que A é uma matriz ortogonal se e só se as colunas de A formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

19. Diga se existe algum valor de $k \in \mathbb{R}$ para o qual as matrizes seguintes são ortogonais:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & -k \\ k & 2 \end{bmatrix}.$$

20. Mostre que qualquer matriz ortogonal, 2×2 , de determinante igual a 1, se escreve na forma $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

21. Seja A uma matriz real, $n \times k$, cujas colunas são linearmente independentes.

- (a) Mostre que $A^T A$ é invertível.
- (b) Mostre que $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ é uma matriz de projecção, isto é $P^2 = P$ (P diz-se idempotente).
- (c) Mostre que para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$ se tem: $Pb = b$ se $b \in EC(A)$ e que $Pb = 0$ se $b \perp EC(A)$. Ou seja P é a matriz que dá a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre o espaço das colunas de A .

Processo de Gram-Schmidt

22. Utilize o processo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar numa base ortonormal a base $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

23. Determine uma base ortonormada para

$$U = \text{Span}((1, 0, -1, 0), (-1, 2, 0, 1), (2, 0, 2, 1), (2, 2, 1, 1)).$$

24. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado pela equação $y = 2x$. Determine $W^\perp$ e a distância do vector $(1, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$.

25. Considere $U = \text{Span}((1, 0, -1), (-1, 2, 0))$. Use o exercício 21 para determinar a projecção ortogonal de $(9, 9, 0)$ sobre U .

Espaços lineares munidos de um produto interno

26. Decida quais das expressões seguintes definem um produto interno. Em caso negativo indique qual (ou quais) dos axiomas de definição do produto interno não se verifica.

- (a) $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$ em $\mathbb{R}^2$.
- (b) $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$ em $\mathbb{R}^3$.
- (c) $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$ em $\mathbb{R}^3$.
- (d) $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$ em $\mathbb{R}^3$.

27. Considere em $\mathbb{C}^2$ o produto interno usual e $u = (i, i)$ e $v = (1 + 2i, 1 - 2i)$.

- (a) Verifique se u e v são ou não ortogonais.
- (b) Determine $\text{proj}_v(u + v)$.

28. Seja $M_{2 \times 2}$ o espaço linear real das matrizes reais 2×2 , e U o subespaço das matrizes anti-simétricas (i.e $A = -A^T$). Em $M_{2 \times 2}$ considere o produto interno

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T), \quad (1)$$

onde tr designa o traço de uma matriz.

- (a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido em (1) é um produto interno.
- (b) Determine a dimensão de U e de $U^\perp$.
- (c) Determine bases ortonormadas para U e para $U^\perp$.
- (d) Determine as projecções ortogonais de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ sobre U e sobre $U^\perp$.
- (e) Qual a matriz anti-simétrica mais próxima de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$?
- (f) Determine a distância de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ a U .

29. Diga se são simétricas, anti-simétricas, hermitianas, anti-hermitianas ou unitárias as matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$$

30. Seja A uma matriz anti-simétrica, $n \times n$, com n ímpar. Diga qual o valor de $\det(A)$. Dê um exemplo de uma matriz 3×3 anti-simétrica.

31. Mostre que toda a matriz A se pode escrever na forma $A = R + T$ onde R é simétrica e T anti-simétrica.

32. Sendo A e B matrizes reais simétricas. Diga qual o valor lógico das afirmações:

- (a) $A + B$ é simétrica.
- (b) AB é simétrica.
- (c) Se $AB = BA$ então AB é simétrica.

33. Seja A uma matriz real simétrica. Mostre que se u e v são vectores próprios de A associados a valores próprios distintos então u e v são ortogonais.

34. Seja V um espaço linear real de dimensão n munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euclideano e A uma matriz $n \times n$ que verifica $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$. Mostre que:

- (a) $\|Av\| = \|v\|$, para todos os vectores $v \in V$.
- (b) A é invertível;
- (c) $\langle A^{-1}u, A^{-1}v \rangle = \langle u, v \rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$;
- (d) $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^{-1}v \rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$;
- (e) Mostre que se λ é um valor próprio de A então $|\lambda| = 1$.

35. Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ por meio de uma matriz ortogonal.

Note que a soma por linhas de A é constante.

36. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

- (a) Justifique o porquê da igualdade seguinte ser uma diagonalização ortogonal da matriz A :

$$\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

- (b) Verifique que pode escrever $A = 8u_1u_1^T + 3u_2u_2^T$, onde u_1 e u_2 são respectivamente as colunas 1 e 2 da matriz: $\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

37. Considere um paralelepípedo definido pelos vectores $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 0, 1)$.

- (a) Determine a área do paralelogramo definido por u e v .
- (b) Determine a altura do paralelepípedo.
- (c) Determine o volume do paralelepípedo usando a noção de determinante de uma matriz. Use ainda os resultados das alíneas anteriores para confirmar o resultado obtido.

Tópico I: Mínimos quadrados

38. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule Au e Av e compare estes vectores com b . Diga se u pode ou não ser uma solução de mínimos quadrados para a equação $Ax = b$?

39. Determine todas as soluções de mínimos quadrados para a equação $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

40. Determine todas as soluções de mínimos quadrados do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

41. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações seguintes:

- (a) Uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ é um vector x^* tal que $\|b - Ax\| \leq \|b - Ax^*\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- (b) Se as colunas de A são linearmente independentes então a solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ é única.
- (c) Uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ é um vector do espaço das colunas de A mais próximo de b .

42. Seja P uma matriz simétrica tal que $P^2 = P$ (uma matriz deste tipo designa-se por matriz de projecção ou matriz de projecção ortogonal). Para um vector $b \in \mathbb{R}^n$ considere $b^* = Pb$ e o vector $z = b - b^*$.

- (a) Mostre que z é ortogonal a b^* .
- (b) Mostre que b é a soma de um vector do espaço das colunas de P ($EC(P)$) com um vector de $EC(P)^\perp$. Diga porque razão isto mostra que Pb é a projecção ortogonal de b sobre o espaço das colunas de P .

43. Determine a equação da recta de mínimos quadrados, $y = \alpha + \beta x$ que melhor se ajusta aos dados: $(2, 3), (2, 5), (6, 4), (8, 1)$.

44. Determine o polinómio cúbico que melhor se ajusta aos pontos

$$(-1, 10), (0, -4), (1, -2), (2, 1), (3, 10).$$

Exercícios de escolha múltipla

45. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Para o produto interno usual, uma base ortogonal para W é

☐ $\{(-1/2, 1/2, 1)\}$

☐ $\{(1, 1, 0)\}$

☐ $\{(1, 1, -2), (-1, 1, 0)\}$

☐ $\{(1, 1, 0), (-1/2, 1/2, 1)\}$

46. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\langle x, y \rangle = x^T A y$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $x, y \in \mathbb{R}^2$ são vectores coluna.

(a) Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- ☐ Os vectores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Os vectores $(1, \frac{-1}{2})$ e $(1, 1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Os vectores $(1, \frac{-1}{2})$ e $(1, 1)$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Os vectores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.

(b) Designe por $\text{proj}_v u$ a projecção ortogonal de u sobre v para o produto interno dado. Então

- | | |
|--|--|
| ☐ $\text{proj}_{(1,1)}(1, 0) = \frac{2}{3}(1, 0)$ | ☐ $\text{proj}_{(1,0)}(1, 1) = \frac{1}{3}(1, 0)$ |
| ☐ $\text{proj}_{(1,0)}(1, 1) = (1, 1)$ | ☐ $\text{proj}_{(1,1)}(0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1)$ |