

Álgebra Linear

Cursos: MEEC, MAmb, LMat, LQ, LEIC-A, MEQ
2ºS — 2007/08

4ª Lista: ESPAÇOS LINEARES (ou vectoriais)

Notações: Seja A uma matriz e S um conjunto de vectores.

Núcleo de A : $\text{Nuc}(A)$, $\text{Ker}(A)$ ou $N(A)$.

Espaço das colunas de A : $\text{EC}(A)$.

Espaço das linhas de A : $\text{EL}(A)$.

Expansão linear de S ou conjunto gerado por S : $L(S)$ ou $\text{Span}(S)$.

Característica de A : $\text{car}(A)$ ou $\text{rank}(A)$.

Dimensão de um espaço linear X : $\dim(X)$.

Coordenadas do vector x na base B : x_B .

Coordenadas do vector x na base canónica: x_{BC} ou x .

Subespaços de $\mathbb{R}^n$

1. Determine o núcleo (espaço nulo) das seguintes matrizes:

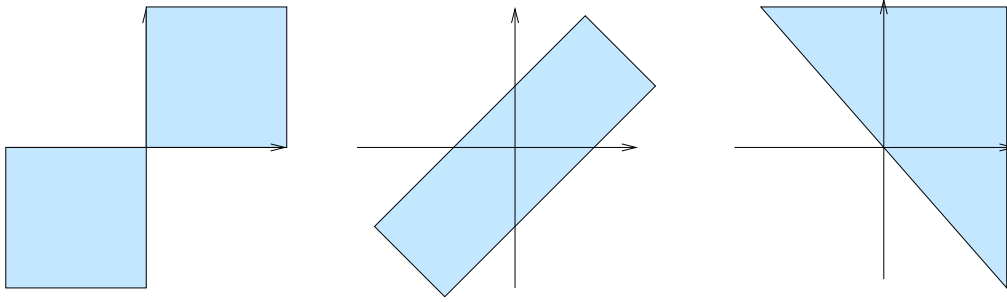
$$(a) \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \ B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c) \ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Exprima cada um dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.

- (a) $(-9, -7, -15)$
- (b) $(6, 11, 6)$
- (c) $(0, 0, 0)$

3. Considere $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$, vectores em $\mathbb{R}^4$. Quais dos vectores seguintes pertencem à expansão linear $\text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$?

- (a) $(2, 3, -7, 3)$
- (b) $(0, 0, 0, 0)$
- (c) $(1, 1, 1, 1)$
- (d) $(-4, 6, -13, 4)$

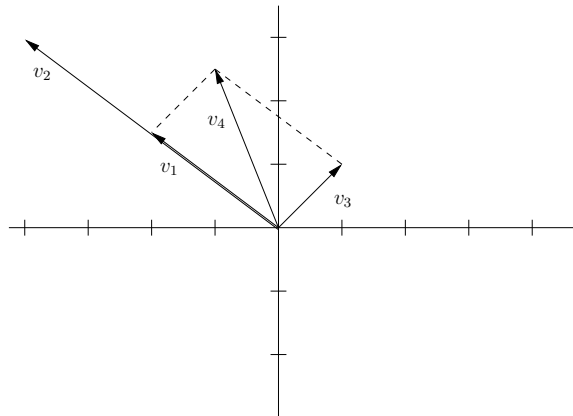


4. Para os conjuntos representados na figura acima justifique por que é que não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

5. Na figura seguinte estão representados os vectores v_1, v_2, v_3 e v_4 . Considere ainda os conjuntos seguintes

$$A = \{v_1, v_2\}, \quad B = \{v_1, v_3\} \quad C = \{v_1, v_2, v_4\}, \quad D = \{v_2, v_4\}, \quad E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Diga quais destes conjuntos gera $\mathbb{R}^2$.



6. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

- (a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0, 1)$ com a real
- (b) O conjunto de vectores da forma $(a, b, 0, 0)$ com a, b reais.
- (c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $b = a + c - d$ e $c = 2d$, sendo a, b, c, d reais.
- (d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com a, b, c, d positivos.
- (e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $c = a + b + 1$ e $d = 2a - b$, sendo a, b, c reais.

7. Dê um exemplo de uma matriz A , 2×2 , e de um vector b de $\mathbb{R}^2$ tal que b não pertença ao conjunto gerado pelas colunas de A .

8. Construa uma matriz real 3×3 , que não esteja em escada de linhas, cujas colunas não geram $\mathbb{R}^3$.

9. Seja A uma matriz real 4×4 e b um vector de $\mathbb{R}^4$ para o qual o sistema $Ax = b$ tem solução única. Explique o porquê das colunas de A gerarem $\mathbb{R}^4$.

10. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares.

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$.
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.
- (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \wedge x - 2y - z = 0\}$.
- (d) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 2\}$.

Independência linear; Bases; Dimensão

11. Determine se o conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é ou não linearmente independente. Caso o não seja, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de vectores e escreva os restantes elementos de S como combinação linear desses vectores.

- (a) Em $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 2, 2)$, $u_3 = (1, 2, 3, 3)$ e $u_4 = (1, 2, 3, 4)$.
- (b) Em $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (1, 2, 0)$ e $u_4 = (1, 2, 2)$.

12. Determine a dimensão e uma base para a solução geral de cada um dos sistemas seguintes:

$$(a) \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -2x - y + 2z &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x + y + z + t &= 0 \\ 5x - y + z - t &= 0 \end{cases}$$

13. Para cada uma das matrizes seguintes, encontre a dimensão e uma base para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz, para o espaço gerado pelas linhas da matriz, e para o espaço gerado pelas colunas da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

14. Utilize a informação da tabela seguinte para determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas da matriz A , do espaço gerado pelas colunas de A , do núcleo de A e do núcleo de A^T (matriz transposta de A).

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2

15. Utilize a informação da seguinte tabela para determinar se o correspondente sistema de equações lineares não-homogêneo $AX = b$ é possível. Em caso afirmativo, indique o número de variáveis livres que entram na solução geral.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car (A b)	3	3	1	2	3	0	2

16. Seja A uma matriz real 4×4 . Responda às questões seguintes:

- (a) Se o espaço das colunas de A não é $\mathbb{R}^4$ que pode dizer a respeito do núcleo de A ?
- (b) Se o núcleo de A não é o subespaço $\{0\}$ que pode dizer a respeito do espaço das colunas de A ?
- (c) Se o espaço das colunas de A é $\mathbb{R}^4$ que pode dizer a respeito das soluções do sistema $Ax = b$ para $b \in \mathbb{R}^4$?
- (d) Se o núcleo de A é $\{0\}$ que pode dizer a respeito das soluções do sistema $Ax = b$ para $b \in \mathbb{R}^4$?

17. Dada a base $\mathcal{B}$ e $x_{\mathcal{B}}$ (coordenadas de x na base $\mathcal{B}$), determine x .

$$(a) \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (b) \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

18. Determine as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$ para

$$(a) x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (b) x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

19. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes, justificando a sua resposta:

- (a) O conjunto de todas as soluções de um sistema homogêneo de n equações lineares a k incógnitas é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
- (b) As colunas de uma matriz real, $n \times n$, invertível, formam uma base para $\mathbb{R}^n$.

Espaços lineares

20. Exprima a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

21. Determine se os vectores seguintes são ou não linearmente independentes. Caso o não sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos.

- (a) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3: $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1 + t$, $p_3(t) = 1 + t + t^2$ e $p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$.
- (b) No espaço $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

22. Diga quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares, e no caso afirmativo diga qual a sua dimensão e indique uma base.

- (a) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \wedge -4y + z = 0 \wedge x - w = 0\}$.
- (b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{Z} \right\}$.
- (c) Em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes invertíveis.
- (d) No espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 5, o conjunto dos polinómios $a_0 + a_1t + a_2t^2$ tais que $a_0 + a_1 = 0$.
- (e) $\text{Span}(S)$, onde S é o subconjunto do espaço das funções reais de variável real, com as operações usuais, definido por $S = \{\cos^2(t) - \sin^2(t), \cos(2t) + \sin(t), \sin(t)\}$.

23. Mostre que se U e V são subespaços lineares de um espaço W , então $U \cap V$ e $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ também são subespaços lineares de W . Nota: $U + V$ é, por definição, o conjunto $\{u + v : u \in U, v \in V\}$.

24. Seja V o espaço linear dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

- (a) Diga qual a dimensão de V e indique uma base ordenada para V . Indique as coordenadas do polinómio $(1-t)(1+t)$ nessa base.
- (b) Considere o subconjunto $S \subset V$ dado por $S = \{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$. Diga, justificando, se S é uma base para V .
- (c) Diga qual a dimensão do espaço linear $\text{Span}(S)$, e determine uma base para esse espaço.
- (d) Seja T o subconjunto de todos os polinómios de V que se anulam em 0. Diga se T é um subespaço linear de V . Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e uma base.

Exercícios de escolha múltipla

25. Seja A uma matriz $n \times p$ tal que a dimensão do núcleo de A é 2, a dimensão do núcleo de A^T é 1, e a dimensão do espaço das linhas de A é 2. Então

- ☐ $n = 4$ e $p = 5$. ☐ $n = 5$ e $p = 4$. ☐ $n = 3$ e $p = 4$. ☐ $n = 4$ e $p = 3$.

26. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira para

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}.$$

- ☐ V não é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ é uma base de V .
- ☐ $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 3, 1)\}$ é uma base de V .
- ☐ $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ é uma base de V .

27. Sejam u, v, w vectores linearmente independentes de um espaço linear real U . Então:

- ☐ A dimensão de U é 3.
- ☐ A dimensão de $\text{Span}(\{u, v, w, u+v\})$ é 4.
- ☐ A dimensão de $\text{Span}(\{u, v, w, u+v\})$ é igual à dimensão de $\text{Span}(\{u, v, w\})$.
- ☐ A dimensão de U é inferior a 3.

28. Seja $B = (1, 1+t, 2t+t^2)$ uma base ordenada para o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Então as coordenadas de $p(t) = 3+t+t^2$ na base B são:

- ☐ $(8, -3, 1)$ ☐ $(5, -1, 1)$ ☐ $(6, -1, 1)$ ☐ $(4, -1, 1)$