Álgebra Linear

Cursos: MEEC, MAmb, LMat, LQ, LEIC-A, MEQ
2ºS — 2007/08

3ª Lista: Determinantes

---

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Considere por hipótese que $\det(A) = -7$. Calcule

a) $\det(3A)$ *b*) $\det(2A^{-1})$ *c*) $\det((2A)^{-1})$ *d*) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

2. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ é satisfeita a equação

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Usando a propriedade de linearidade do determinante escreva

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

5. Diga, justificando, se é ou não verdadeira a igualdade:

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

6. Sem calcular os determinantes, mostre as igualdades seguintes:

a) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$b)\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. Para que valor(es) de k a matriz A deixa de ser invertível?

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$$

8. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Cacule o determinante de M.
(b) Calcule det $(2M)$, det $(2M^{-1})$ e det $((2M)^{-1})$.
(c) Diga qual é o elemento $(1,4)$ da matriz M^{-1}.

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Verifique que A é invertível e calcule:

$$(a)\ \det(2A^{-1}) \quad (b)\ \det(A^2(2A^{-1})) \quad (c)\ \det(A^T(\mathrm{tr}\,A)A)^{-1}$$

10. Use o desenvolvimento de Laplace para calcular os determinantes das matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Além disso, calcule a inversa de A e de B sem utilizar o método de Eliminação de Gauss.

11. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares utilizando a regra de Cramer.

$$(a)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

12. Resolva as seguintes equações:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (b)\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

13. A matriz dos cofactores de A é: $cof(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Use a fórmula $A\,(cof(A))^T = \det(A)I$ para calcular $\det(A)$.

(b) Justifique por que razão A é invertível e calcule a entrada (3,2) da inversa de A.

14. A matriz dos cofactores de A é: $cof(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Use a fórmula $A\,(cof(A))^T = \det(A)I$ para calcular $\det(A)$.

(b) Determine a matriz inversa de A

Exercícios de escolha múltipla

---

15. O valor do determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é:

☐ -12α ☐ 0 ☐ 12α ☐ 2α

---

16. Considere A e B duas matrizes quadradas de ordem 3 e a seguinte lista de afirmações.

I) $\det(AB) = \det(BA)$.

II) Se $\det A = 0$ e $\det B = 0$ então $\det(A + B) = 0$.

III) $\det(2AB) = 8\det\,(AB)$.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ I e III ☐ II e III ☐ I e II e III
