

## Álgebra Linear

Cursos: MEEC, MAmb, LMat, LQ, LEIC-A, MEQ  
2ºS — 2007/08

---

### 2ª Lista: SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES; INVERSÃO DE MATRIZES

---

#### Sistemas de equações lineares

1. Quais das seguintes equações são equações lineares em  $x$ ,  $y$  e  $z$ ?

a)  $x + 5y - \sqrt{2}z = 1$

b)  $x + 5y - \sqrt{2z} = 1$

c)  $x = -2y + \pi$

d)  $x + 5y + \cos z = 0$

e)  $x^{-2} + y - 3z = -3$

2. Determine a equação da parábola,  $y = ax^2 + bx + c$ , que passa pelos pontos  $(1, 3)$ ,  $(2, 4)$  e  $(-1, -1)$ .

3. Use os resultados do problema anterior para determinar o polinómio  $p$  de grau menor ou igual a dois, que toma os valores indicados na tabela seguinte

|        |   |   |    |
|--------|---|---|----|
| $x$    | 1 | 2 | -1 |
| $p(x)$ | 3 | 4 | -1 |

4. Diga para que valores de  $\alpha$  e de  $\beta$  o sistema seguinte é possível:

$$\begin{cases} -2x + 10y = \alpha \\ 8x - 40y = \beta \end{cases}$$

5. Considere as rectas  $x - y = 10$  e  $x + 2y = 4$ . Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(a) As rectas intersectam-se no ponto  $(100, 90)$ .

(b) O ponto  $(100, 90)$  pertence a uma das rectas e não é ponto de intersecção das duas rectas.

(c) As rectas são paralelas.

6. Sendo  $i$  a unidade imaginária (i.e.  $i^2 = -1$ ), diga se  $(z_1, z_2) = (2 - 3i, 1 - i)$  é ou não solução do sistema:

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = 1 - 2i \\ (1 + i)z_2 = 2. \end{cases}$$

**7.** Quais das seguintes matrizes  $3 \times 3$  são matrizes em escada por linhas? Indique as respectivas características.

$$\begin{array}{llll}
 a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 e) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & g) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & h) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 i) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & j) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & k) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & l) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

**8.** Determine a característica de cada uma das matrizes seguintes ( $i$  denota a unidade imaginária  $\sqrt{-1}$ ):

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -1 & 1+2i \\ -3+i & 5+5i \end{bmatrix}$$

**9.** Considere as seguintes matrizes aumentadas em escada de linhas. Resolva cada um dos respectivos sistemas de equações lineares.

$$(a) \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \quad (b) \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

**10.** Considere as matrizes reais  $A$  e  $b$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & \alpha^2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha + 2 \end{bmatrix}.$$

- Determine a característica da matriz  $A$  e da matriz aumentada  $[A \ b]$  em função do parâmetro  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Use os resultados da alínea anterior para discutir (em função de  $\alpha$ ) os sistemas,  $Ax = b$ , indicando em cada caso a solução geral.



**Inversão de matrizes**

**15.** Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Encontre matrizes elementares tais que  $E_k \dots E_1 A = \text{Id}$ .
- b) Escreva  $A^{-1}$  como um produto de  $k$  matrizes elementares.
- c) Escreva  $A$  como um produto de  $k$  matrizes.

**16.** Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível para quaisquer entradas  $a, b, c, d, e, f, g, h$  reais.

**17.** Utilizando o Método de Gauss-Jordan, calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} & \text{b)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{d)} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} & \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} & \text{f)} \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

**18.** Calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} & \text{b)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix} \end{array}$$

em que  $k_1, k_2, k_3, k_4$  e  $k$  são reais.

**19.** Senda  $A$  e  $B$  duas matrizes  $n \times n$  invertíveis, diga justificando quais das matrizes seguintes são invertíveis, indicando nesses casos a expressão da matriz

inversa. Nos casos em que a matriz não seja necessariamente invertível, ilustre as diferentes possibilidades através de exemplos.

$$a)AB \quad b)A+B \quad c)A^{-1}B \quad A^pB^qA^{-q}B^{-q}(p,q \in \mathbb{N})$$

**20.** Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes quadradas tais que  $AB = \text{Id}$ . Calcule a matriz  $BA^2 - A$ .

**21.** Considere o sistema não homogêneo  $Ax = b$  onde  $A$  é  $n \times n$ . Diga quais das afirmações seguintes são verdadeiras.

- (a) Se  $b$  é uma combinação linear das colunas de  $A$  então o sistema é possível.
- (b) Se o sistema é possível então a característica de  $A$  é  $n$ .
- (c) Se  $A$  é invertível então o sistema pode ser indeterminado.
- (d) Se  $A$  é invertível então a característica de  $A$  é menor ou igual a  $n$ .
- (e) Se o sistema é possível e determinado então o núcleo de  $A$  possui um vector não nulo.

#### Exercícios de escolha múltipla

---

**22.** Para a matriz  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , diga qual das afirmações seguintes é verdadeira.

- ☐ A característica de  $A$  é 3.
  - ☐ A característica de  $A$  é 2.
  - ☐ A característica de  $A$  depende dos valores de  $\alpha$  e de  $\beta$ .
  - ☐ A característica de  $A$  é 1.
- 

**23.** A matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  é uma matriz elementar. Sendo  $B$  uma matriz  $2 \times 2$ , então  $BA$  é a matriz que se obtém de  $B$ :

- ☐ trocando a 1ª linha com a 2ª linha .
  - ☐ trocando a 1ª coluna com a 2ª coluna .
  - ☐ substituindo a 2ª linha de  $B$  pela soma da 2ª linha com a 1ª multiplicada por 2.
  - ☐ substituindo a 2ª coluna de  $B$  pela soma da 2ª coluna com a 1ª multiplicada por 2.
-

**24.** Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira para  $A$  uma matriz quadrada e  $b$  um vector não nulo.

☐ Se  $x$  é solução do sistema  $Au = 0$  e  $y$  solução do sistema  $Au = b$ , então  $(x - y)$  é solução de  $Au = b$ .

☐ Se  $x$  é solução do sistema  $Au = 0$  e  $y$  solução do sistema  $Au = b$ , então  $(x - y)$  é solução de  $Au = -b$ .

☐ Se  $x$  é uma solução de  $Au = 0$  então necessariamente  $x = 0$ .

☐ Se  $A$  não é invertível então  $x = 0$  é a única solução de  $Au = 0$ .

**25.**  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  é a matriz inversa de  $A$ . Então a solução do sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ é}$$

☐  $(3, 4, 0)$ .

☐  $(4, 4, 0)$ .

☐  $(4, 9, 1)$ .

☐  $(2, 9, 1)$ .

### Exercício resolvido

**26.** Faça a discussão do sistema homogéneo  $A_\alpha x = 0$  em termos do parâmetro  $\alpha$ , onde

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -\alpha^2 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

**Resolução:** Aplique-se o método de eliminação de Gauss à matriz dos coeficientes do sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -\alpha^2 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -\alpha^2 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 - 4L1, L4 - 2L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 - \alpha^2 & \alpha^2 - 4 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L4 - 2L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 - \alpha^2 & \alpha^2 - 4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix}.$$

Note que a característica de  $A_\alpha$  é :

$$\text{car}(A_\alpha) = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 2 \\ 3 & \text{se } \alpha = -2 \\ 4 & \text{se } \alpha \neq \pm 2 \end{cases}$$

Logo, para  $\alpha \neq \pm 2$  o sistema tem exclusivamente a solução nula.  
O sistema dado é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ y + z + w = 0 \\ (4 - \alpha^2)z + (\alpha^2 - 4)w = 0 \\ (\alpha - 2)w = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Quando  $\alpha = 2$  o sistema (1) reduz-se às duas primeiras equações. Resolvendo a segunda equação obtemos  $y = -z - w$  e substituindo na primeira equação vem  $x = 2z$ . Logo a solução geral do sistema (para  $\alpha = 2$ ) é:

$$\begin{aligned} \{(x, y, z, w) : y = -z - w \wedge x = 2z \wedge z \in \mathbb{R} \wedge w \in \mathbb{R}\} = \\ = \{(2z, -z - w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Quando  $\alpha = -2$  o sistema reduz-se a

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ y + z + w = 0 \\ -4w = 0. \end{cases}$$

Logo, da última equação vem  $w = 0$ , que substituído nas duas primeiras equações dá  $y = -z$  e  $x = 2z$ . A solução geral do sistema (para  $\alpha = -2$ ) é:

$$\{(x, y, z, w) : y = -z \wedge x = 2z \wedge z \in \mathbb{R}\} = \{(2z, -z, z, 0) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Concluindo:

O sistema é sempre possível pois é um sistema homogêneo.

Se  $\alpha \neq 2$  e  $\alpha \neq -2$  o sistema é determinado com solução única  $(0, 0, 0, 0)$ .

Se  $\alpha = 2$  o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 2 e solução geral:

$$\{(2z, -z - w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Se  $\alpha = -2$  o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 1 e solução geral:

$$\{(2z, -z, z, 0) : z \in \mathbb{R}\}.$$