Álgebra Linear

Cursos: MEEC, MAmb, LMat, LQ, LEIC-A, MEQ
2ºS — 2007/08

1^{a} Lista: Cálculo matricial

Cálculo Matricial

1. Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\cdots,4}$ definida por:

(a) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ -1 & \text{se } i=j+1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ $\quad (b)$ $a_{ij} = i^2$ $\quad (c)$ $a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{para todo } i,j \\ j & \text{para } j>i \end{cases}$

2. Complete a igualdade:

$$\begin{bmatrix} 10 & 200 & 0.5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

3. Seja B uma matriz 3×3 cuja 3^{a} coluna é $b = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ c \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Complete as afirmações:

(a) A 3^{a} coluna de AB é ....
(b) $X = Ab$ é uma combinação linear das colunas de A com coeficientes...............................

4. Considere os vectores:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique se b é combinação linear de u_1, u_2 e u_3 e em caso afirmativo indique quais os coeficientes da combinação linear.

(b) Seja A a matriz que tem como colunas os vectores u_1, u_2 e b, por esta ordem. Usando a alínea anterior indique um vector $w = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{bmatrix}$ e um escalar γ tal que $Aw = \gamma u_3$.

5. Complete a igualdade

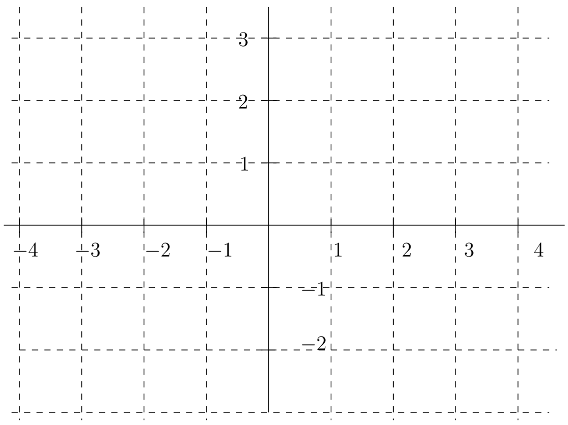
$$\begin{bmatrix} -10 & 1 \\ \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ 3 \end{bmatrix}.$$

por forma a que resolver esta equação seja equivalente à resolução do problema:

- Determinar a equação da recta, $y = mx + b$, que passa pelos pontos $(-10, 1)$ e $(2, 3)$

Indique ainda a solução do problema.

6. Considere os vectores $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. No gráfico abaixo represente os vectores: u, v, $u + 2v$, $2u + v$ e $u - 2v$.



7. Calcule, se possível, os produtos AB e BA, quando:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 + \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 2 - 3\mathrm{i} \end{bmatrix}$

8. Considere uma função definida por $f(x) = Ax$, que aplica o vector $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ no vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ no vector $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(a) Sem determinar a matriz A calcule $f(u - 2v)$.

(b) Determine a matriz A e use-a para calcular $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ e $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

9. Para cada par de matrizes A e B abaixo indicadas determinar, caso estejam definidas, as matrizes $A + 2B$, $A - B$, A^2, B^2, AB e BA.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = [2]$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

10. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule: AB, $(AB)^T$, $B^T A^T$ e $A^T B^T$.

11. Obtenha uma fórmula para A^n, onde A é a seguinte matriz:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ *b)* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ *c)* $\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ $\qquad$ *d)* $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

12. Dê exemplos sempre que possível, de matrizes quadradas A e B que verifiquem as condições abaixo indicadas. Caso não seja possível, justifique porquê.

(a) $AB = BA \neq 0$.
(b) $AB \neq BA$.
(c) $AB = 0$ e $BA \neq 0$.
(d) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
(e) $AB = 0$ e $A \neq 0$ e $B \neq 0$.