

Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

5ª Lista de Exercícios

Problema 1.

Exprima a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Problema 2. Determine se os seguintes conjuntos de vetores são ou não linearmente independentes. Caso o não sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos.

- No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1+t$, $p_3(t) = 1+t+t^2$ e $p_4(t) = 1+t+t^2+t^3$.
- No espaço $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Problema 3.

Diga quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares, e no caso afirmativo diga qual a sua dimensão e indique uma base.

- $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \wedge -4y + z = 0 \wedge x - w = 0\}$.
- $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes invertíveis.
- No espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 5, o conjunto dos polinómios $a_0 + a_1t + a_2t^2$ tais que $a_0 + a_1 = 0$.
- $L(S)$, onde S é o subconjunto do espaço das funções reais de variável real, com as operações usuais, definido por $S = \{\cos^2(t) - \sin^2(t), \cos(2t) + \sin(t), \sin(t)\}$.

Problema 4.

Mostre que se U e V são subespaços lineares de um espaço W , então $U \cap V$ e $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ também são subespaços lineares de W . Nota: $U + V$ é, por definição, o conjunto $\{u + v : u \in U, v \in V\}$

Problema 5.

Seja V o espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

- Diga qual a dimensão de V e indique uma base ordenada para V . Indique as coordenadas do polinómio $(1-t)(1+t)$ nessa base.
- Considere o subconjunto $S \subset V$ dado por $S = \{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$. Diga, justificando, se S é uma base para V .
- Diga qual a dimensão do espaço linear $L(S)$, e determine uma base para esse espaço.
- Seja T o subconjunto de todos os polinómios de V que se anulam em 0. Diga se T é um subespaço linear de V . Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e uma base.

Exercícios de escolha múltipla

6. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira para

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}.$$

- V não é subespaço linear de \mathbb{R}^3 .
- $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ é uma base de V .
- $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 3, 1)\}$ é uma base de V .
- $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ é uma base de V .

7. Sejam u, v, w vectores linearmente independentes de um espaço linear real U . Então:

- A dimensão de U é 3.
- A dimensão de $L(\{u, v, w, u+v\})$ é 4.
- A dimensão de $L(\{u, v, w, u+v\})$ é igual à dimensão de $L(\{u, v, w\})$.
- A dimensão de U é inferior a 3.

8. Seja $B = (1, 1+t, 2t+t^2)$ uma base ordenada para o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Então as coordenadas de $p(t) = 3+t+t^2$ na base B são:

- $(8, -3, 1)$
- $(5, -1, 1)$
- $(6, -1, 1)$
- $(4, -1, 1)$