Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

4^{a} **Lista de Exercícios**

Problema 1.
Determine o núcleo (espaço nulo) das seguintes matrizes:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c)\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Problema 2.
Exprima cada um dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.

a) $(-9, -7, -15)$
b) $(6, 11, 6)$
c) $(0, 0, 0)$

Problema 3.
Considere $\mathbf{v_1} = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v_2} = (3, -1, 5, 2)$ e $\mathbf{v_3} = (-1, 0, 2, 1)$, vectores em $\mathbb{R}^4$. Quais dos vectores seguintes pertencem à expansão linear $\mathrm{L}(\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\})$?

a) $(2, 3, -7, 3)$
b) $(0, 0, 0, 0)$
c) $(1, 1, 1, 1)$
d) $(-4, 6, -13, 4)$

Problema 4. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$:

a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0)$ com a real.
b) O conjunto de vectores da forma $(a, 1, 1)$ com a real.
c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e a, b, c reais.
d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com a, b, c inteiros.
e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c + 1$ e a, b, c reais.

Problema 5.

Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0, 1)$ com a real
b) O conjunto de vectores da forma $(a, b, 0, 0)$ com a, b reais.
c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $b = a + c - d$ e $c = 2d$, sendo a, b, c, d reais.
d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com a, b, c, d positivos.
e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $c = a + b + 1$ e $d = 2a - b$, sendo a, b, c reais.

Problema 6.

Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$.
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \wedge x - 2y - z = 0\}$.
d) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 2\}$.

Problema 7. Determine se os seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes ou não. Caso o não sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

a) Em $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 2, 2)$, $u_3 = (1, 2, 3, 3)$ e $u_4 = (1, 2, 3, 4)$.
b) Em $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (1, 2, 0)$ e $u_4 = (1, 2, 2)$.

Problema 8.

Determine a dimensão e uma base para o espaço solução de cada um dos sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -2x - y + 2z &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y + z + t &= 0 \\ 5x - y + z - t &= 0 \end{cases}$

Problema 9.

Para cada uma das matrizes seguintes, encontre a dimensão e uma base para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz, para o espaço gerado pelas linhas da matriz, e para o espaço gerado pelas colunas da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Problema 10.

Utilize a informação da seguinte tabela para determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas da matriz A, do espaço gerado pelas colunas de A, do núcleo de A (nulidade de A) e do núcleo de A^T (matriz transposta de A).

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2

Problema 11.

Utilize a informação da seguinte tabela para determinar se o correspondente sistema de equações lineares não-homogéneo $AX = B$ é possível. Em caso afirmativo, indique o número de variáveis livres que entram na solução geral.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car (A$\vdots$B)	3	3	1	2	3	0	2

Exercícios de escolha múltipla

---

12. Seja A uma matriz $n \times p$ tal que a dimensão do núcleo de A é 2, a dimensão do núcleo de A^T é 1, e a dimensão do espaço das linhas de A é 2. Então

☐ $n = 4$ e $p = 5$. ☐ $n = 5$ e $p = 4$. ☐ $n = 3$ e $p = 4$. ☐ $n = 4$ e $p = 3$.
