Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

10^{a} **Lista de Exercícios**

Problema 1. Diga, justificando, quais das seguintes funções são transformações lineares.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$.
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$.
d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$.
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$.
f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 5x_2)$.

Problema 2. Considere os vectores v_1, v_2 e v_3 do espaço linear W, e $T : W \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(v_1) = (1, -1, 2)$, $T(v_2) = (0, 3, 2)$, $T(v_3) = (-3, 1, 2)$. Determine $T(3v_1 - v_2 + 10v_3)$.

Problema 3. Determine a matriz que representa cada uma das transformações lineares abaixo, em relação à base canónica no espaço de partida e à base canónica no espaço de chegada.

a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.
c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$.
d) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$.
e) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$.

Problema 4. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear, U e V espaços lineares.

a) Mostre que $T(0) = 0$.
b) Conclua que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde $T(x, y) = (2x - y, x + y + 1, x)$, não é uma transformação linear.

Problema 5. Defina cada uma das transformações lineares T seguintes na forma $T(X) = AX$, onde A é uma matriz. Use a matriz A para obter as imagens por T do triângulo I de vértices $(-1, 2), (0, 0)$ e $(1, 1)$,onde T é :

a) A reflexão em relação ao eixo dos xx ;
b) A reflexão em relação à recta $y = x$;
c) A projecção ortogonal sobre a recta $y = -x$.
d) A rotação em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$.

Problema 6. Defina cada uma das transformações lineares T seguintes na forma $T(X) = AX$, onde A é uma matriz. Use a matriz A para obter as imagens por T do triângulo I de vértices $(-1, 2, 0), (0, 0, 1)$ e $(1, 0, 1)$, onde T é :

a) A reflexão em relação ao plano xz ;
b) A rotação em torno do eixo dos zz, no sentido positivo, de um ângulo de $\pi/2$.

Problema 7. Seja $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (-1, 4)$, e $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ a matriz que representa a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base ordenada $B = (v_1, v_2)$.

a) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base B.
b) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$.
c) Encontre a matriz que representa T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, e encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2)$.
d) Use a fórmula obtida em c) para calcular $T(1, 1)$.

Problema 8. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, a base canónica $BC = (e_1, e_2, e_3)$, e a base ordenada $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (0, 0, 1))$.

a) Determine a matriz F que realiza a mudança de base de BC para $\mathcal{B}$, isto é tal que $x_{\mathcal{B}} = Fx_{BC}$.
b) Dado um vector $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, isto é, de coordenadas (x_1, x_2, x_3) na base BC, determine as suas coordenadas (y_1, y_2, y_3) na base $\mathcal{B}$.
c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja representação matricial na base canónica é $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$.

Problema 9. Seja V o espaço linear real das matrizes reais 2×2, de entradas a_{ij}, satisfazendo $a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{12} + a_{21} = 0$. Considere as seguintes matrizes de V:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V.
b) Dada a transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(H) = J \ , \ T(J) = -H \ ,$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base que contenha H e J.
c) Determine a dimensão do núcleo de T, e diga (justificando) se T é invertível.

Problema 10. Diga, justificando, em que casos se tem $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$:

a) T_1 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx e T_2 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos yy;
b) T_1 é a reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos xx e T_2 é a reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos yy;

Problema 11. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2).$$

a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.
b) Indique um vector de $\mathbb{R}^2$ que não esteja na imagem da transformação.
c) Verifique o teorema da dimensão.

Problema 12. Seja $\mathcal{M}_{2\times 2}$ o espaço das matrizes 2×2. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ a aplicação $T(A) = A + A^t$.

a) Mostre que T é uma transformação linear.
b) Determine a matriz K que representa T em relação à base ordenada

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.
c) Determine bases para o núcleo e para a imagem de T.
d) Diga, justificando, se T é injectiva ou sobrejectiva.
e) Sendo $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ determine $T^{-1}(M)$.

Observação: *Dada uma função $f : A \to B$ e $b \in B$, define-se a imagem completa inversa de b como sendo $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$). Note que o conjunto $f^{-1}(b)$ está definido mesmo que não exista a função inversa de f.*

Problema 13. Indique o valor lógico das seguintes proposições:

a) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
b) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
c) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
d) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
e) Existem transformações lineares injectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2.
f) Existem transformações lineares sobrejectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2.
g) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^4$ é sobrejectiva.
h) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^5$ é sobrejectiva.
i) Existe uma transformação linear bijectiva do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o das matrizes 2×2.

Exercícios de escolha múltipla

---

14. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x, y, z) = (x + 1, y, 2z + x), \qquad S(x, y, z) = (2x, y - z).$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ S e T são transformações lineares.
☐ $S \circ T$ não é uma transformação linear.
☐ O espaço de chegada de $S \circ T$ é $\mathbb{R}^3$.
☐ T é uma transformação linear invertível.

---

15. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e $B = (u, v, w)$ uma base ordenada para V, tal que $T(u-v) = 2u, T(2u+v) = v$ e $T(w) = u-v+w$. Então a matriz que representa T em relação à base B no espaço de partida e de chegada é:

☐ $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1,1,0) = (2,1) \qquad T(0,1,1) = (1,1) \qquad T(1,0,0) = (1,1).$$

Então,

☐ $T(x,y,z) = (x+y, x+z)$ ☐ $T(x,y,z) = (y-x, x+2z)$

☐ $T(x,y,z) = (2z+x+y, x-z)$ ☐ $T(x,y,z) = (2x, x+z)$