Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química

1º Semestre — 10/11/ 2004

| |
|---|
| Nome:____________________________________ |
| Número:__________________________ Curso:________ |

**Duração:** 30 Minutos

**Cotação** das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 1,2 v. Errada: -0,4v.

---

*A preencher pelo docente*:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Correctas | Erradas | TEM | PD |
| Nota | | | |

---

**1.** No espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a dois, $P_2$ , considere as afirmações seguintes: **[1.2]**

I. $\{1+t\,,\,t^2\,,t-1\,,2-t^2\}$ é linearmente independente.
II. As coordenadas de $p(t)=5-t$ na base ordenada $B=(t+1,t^2-1,t)$ são $(5,0,-6)$.
III. $\{t,t^2\}$ é uma base de $P_2$.
IV. $\{0,t,t^2\}$ não é uma base de $P_2$.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e III ☐ II e IV ☐ II e III ☐ I e IV

**Resposta** A opção correcta é a segunda.
*Comentário:* Como um conjunto de vectores que inclua o zero nunca é linearmente independente e portanto não pode ser uma base de um espaço vectorial, a afirmação IV é verdadeira. O espaço de polinómios $P_2$ tem dimensão 3 e portanto qualquer conjunto de 4 vectores é linearmente dependente e qualquer base tem 3 elementos pelo que as afirmações I e III são falsas. Além disso $p(t)=5(t+1)-6t$ e portanto a afirmação II é correcta.

---

**2.** Seja $A$ uma matriz $n\times k$ tal que a dimensão do espaço das colunas é 1, a dimensão do núcleo de $A$ é 1 e a dimensão do núcleo de $A^T$ é 3. Então **[1.2]**

☐ $n=4$ e $k=2$ ☐ $n=2$ e $k=2$ ☐ $n=4$ e $k=5$ ☐ $n=2$ e $k=4$

**Resposta** A opção correcta é a primeira.

*Comentário:* Como a dimensão do núcleo de $A$ é 1 e a característica de $A$ (que é igual à dimensão do espaço de colunas de $A$) é 1 o número de colunas de $A$ é 2. Por outro lado dado que a característica de $A^T$ é igual à característica de $A$ e a dimensão do núcleo de $A^T$ é 3 temos que o número de colunas de $A^T$ (que é o número de linhas de $A$) é 4.

---

**3.** Para $V = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : \ x - y = 0 \wedge w = t \wedge z = 0\}$, diga qual das afirmações seguintes é verdadeira **[1.2]**

☐ A dimensão de $V$ é 3.
☐ $\{(0,0,0,1,1)\,,\,(1,1,0,1,1)\,,\,(1,0,0,1,1)\}$ é uma base de $V$.
☐ $V$ não é um subespaço linear de $\mathbb{R}^5$.
☐ $\{(1,1,0,1,1)\,,\,(1,1,0,0,0)\}$ é uma base de $V$.

**Resposta** A opção correcta é a última.

*Comentário:* Como $V = Nuc\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$, $V$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^5$. Dado que esta matriz tem 5 colunas e caracteristica 3 a dimensão de $V$ é 2. Para além disso, é fácil verificar que os vectores $(1,1,0,1,1), (1,1,0,0,0)$ são linearmente independentes e pertencem a $V$.

---

**4.** Dê um exemplo de uma matriz $3\times4$ cuja dimensão do núcleo seja 3. Determine para esta matriz uma base para o espaço das linhas, para o espaço das colunas e para o núcleo. **[1.5]**

**Resolução**

Para qualquer matriz $M$ de tipo $m\times n$ temos sempre $\dim \mathcal{N}(M) + car(M) = n$. Um exemplo como pedido terá então característica 1 e pode ser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para esta matriz, que está em escada de linhas e tem só um pivot, temos $EL(A) = L(\{(1,0,0,0)\}), EC(A) = L(\{(1,0,0)\})$, donde uma base para $EL(A)$ é formada pelo vector $(1,0,0,0)$, e uma base para $EC(A)$ é formada pelo vector $(1,0,0)$.

Temos ainda $\mathcal{N}(A) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\} =$

$$= L(\{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}).$$

Logo uma base para $\mathcal{N}(A)$ é $((0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$.

---

**5.** Seja $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ a matriz de mudança de base, da base $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ para a base $B_2 \subset \mathbb{R}^2$ (ou seja $x_{B_2} = Sx_{B_1}$ para $x \in \mathbb{R}^2$).

a) As coordenadas de um vector $x$ na base $B_2$ são $x_{B_2} = (1,2)$. Determine as coordenadas de $x$ na base $B_1$. **[0.9]**

b) Determine a base $B_2$ sabendo que $B_1 = ((2,1),(-1,1))$. **[1.0]**

**Resolução**

a) Como $x_{B_2} = Sx_{B_1}$, temos $S^{-1}x_{B_2} = x_{B_1}$ ($S^{-1}$ é a matriz de mudança de base, da base $B_2$ para a base $B_1$).

Calcula-se fácilmente que $S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Como $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos $x_{B_1} = (0,1)$.

a) (*Resolução alternativa*) Seja $B_1 = (f_1, f_2)$. Como a segunda coluna da matriz $S$ é $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, as coordenadas de $f_2$ na base $B_2$ são $(1,2)$ ou seja $f_2 = x$. Logo $x_{B_1} = (0,1)$.

b) Seja $B_2 = (e_1, e_2)$. Como a matriz de mudança de base, da base $B_2$ para a base $B_1$, é $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, temos $e_1 = 2(2,1) - (-1,1) = (5,1)$ e $e_2 = -(2,1) + (-1,1) = (-3,0)$.

b) (*Resolução alternativa*) Seja $B_2 = (e_1, e_2)$ e $S$ a matriz de mudança de base, da base $B_1$ para a base $B_2$. Então, por definição de matriz de mudança de base temos que $(2,1) = e_1 + e_2$ e $(-1,1) = e_1 + 2e_2$. Tomando para $e_1 = (a,b)$ e $e_2 = (c,d)$, obtemos:

$$\begin{aligned} 2 &= a + c & \qquad 1 &= b + d \\ -1 &= a + 2c & \qquad 1 &= b + 2d, \end{aligned}$$

cuja solução é $e_1 = (5,1)$ e $e_2 = (-3,0)$.