Algumas soluções e indicações de resolução da ficha 7 de exercícios

Problema 1.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$. b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Notar que $B = M(T; BC_{\mathbb{R}^2}, BC_{\mathbb{R}^3})$ se relaciona com $A = M(T; B_1, B_2)$ por

$B = PAQ$ onde P é a matriz de mudança de base, da base B_2 para a base canónica de $\mathbb{R}^3$, e Q é a matriz de mudança de base, da base canónica de $\mathbb{R}^2$ para a base B_1.

De forma equivalente $P^{-1}BQ^{-1} = A$ (P^{-1} é a matriz de mudança de base, da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para a base B_2 e Q^{-1} é a matriz de mudança de base, da base B_1 para a base canónica de $\mathbb{R}^2$).

Problema 2.

a) $F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Temos $F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ donde

$$(y_1, y_2, y_3) = (-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, x_1 + x_3).$$

c) Sendo $A = M(T; BC)$, a matriz pedida é FAF^{-1}.

Problema 4.

a) A base canónica de $\mathcal{P}_2$ é $B = (1, t, t^2)$. Como T é linear temos $T(1) = T(1+t^2) - T(t^2) = 0, T(t) = T(1+t) - T(1) = 1$ donde $M(T; B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Sendo $e_1 = 1, e_2 = 1 + t, e_3 = 1 + t + t^2$, temos $T(e_1) = 0$, $T(e_2) = 1 = e_1$ e $T(e_3) = 2t + 1 = -e_1 + 2e_2$, pelo que a matriz B pedida é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de mudança de base S pedida é a matriz de mudança de base da base (e_1, e_2, e_3) para a base canónica ou seja $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) (*Resolução alternativa*) Sendo S a matriz de mudança de base, da base $(1, 1+t, 1+t+t^2)$ para a base canónica de $\mathcal{P}_2$, teremos $B = S^{-1}AS$. Como $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calculando obtém-se $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e logo $B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Problema 5

a) $\alpha H + \beta J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \alpha = \beta = 0$. Logo H, J são linearmente independentes.

b) O espaço V é: $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Logo $\{H, J\}$ forma uma base para V. A dimensão de V é 2.

c) Considere-se a base ordenada $B_1 = (H, J)$ de V. Logo, como $T(H) = J$ e $T(J) = -H$, então a matriz que representa T em relação à base B_1 é:

$$M(T, B_1, B_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que se tivesse usado outra ordenação dos elementos da base, i.e. se tivesse considerado como base $B_2 = (J, H)$, então a matriz que representa T em relação a B_2 é:

$$M(T, B_2, B_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 10.

a) Temos para todo o vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(T_1(x, y)) = T_2(2x, 3y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$. Sendo BC a base canónica de $\mathbb{R}^2$ temos que $A = M(T_2 \circ T_1; BC) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Como $c(A) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, a imagem de $T_2 \circ T_1$ é $\mathbb{R}^2$ e portanto, porque $T_2 \circ T_1$ é uma tranformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, Nuc $(T_2 \circ T_1) = \{0\}$.

Observação Também se podia resolver começando por considerar

$M := M(T_2; BC) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $N := M(T_1; BC) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e usar o facto de que $M(T_2 \circ T_1; BC) = MN$.

b) A expressão de $T_2 \circ T_1$ é $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$

c) A expressão de $T_2 \circ T_1$ é $(T_2 \circ T_1)(x, y, z) = (0, 2x)$.

Problema 11 e 12. São isomorfismos b), d) e e). No caso das reflexões (b) e d)) as transformações lineares inversas são elas próprias, enquanto que em e) a transformação linear inversa é a rotação de ângulo $\frac{3\pi}{2}$ em torno do eixo dos zz.

Em a) o núcleo é o eixo dos yy e a imagem o eixo dos xx, e em c) o núcleo é o eixo dos zz e a imagem o plano $-xy$.

Problema 14. Proposições verdadeiras: b), c), e), f), g), i).