Álgebra Linear - Exercícios resolvidos

Exercício 1:

Sejam $E = L(\{(1,1,1),(1,2,2)\})$ *e* $F = L(\{(0,1,-1),(1,1,2)\})$.

a) Determine a dimensão de $E + F$.

b) Determine a dimensão de $E \cap F$.

Resolução:

a) Temos que $E + F = \mathrm{L}(E \cup F) = \mathrm{L}(\{(1,1,1),(1,2,2),(0,1,-1),(1,1,2)\})$.

Escrevendo as componentes destes vectores como linhas de uma matriz e usando eliminação de Gauss $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ obtemos uma matriz de característica 3 pelo que a dimensão de $E + F$ é 3.

b) Como os vectores $(1,1,1),(1,2,2)$ são linearmente independentes, por não serem múltiplos um do outro, a dimensão de E é 2. Análogamente se vê que a dimensão de F é 2. Dado que dim $E + F =$ dim $E+$ dim $F-$ dim $E \cap F$ e pela alínea anterior dim $E + F = 3$, temos que a dimensão de $E \cap F$ é 1.

Exercício 2:

No espaço dos polinómios reais de grau menor ou igual a 3, P_3*, considere os vectores* $v_1 = 1 + x^3$, $v_2 = 1 + x^2 + x$, $v_3 = x - x^3$, $v_4 = 1 - x$.

a) Verifique que $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ *é uma base de* P_3.

b) Sendo $T : P_3 \to P_3$ *a transformação linear tal que*

$T(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4) = (y_1 + y_2)v_3 + (y_3 + y_4)v_1$ *determine a imagem, o núcleo e os subespaços próprios de* T.

c) Escreva a matriz C *que representa* T *em relação à base* $B_1 = (1, x, x^2, x^3)$ *e diga justificando se* C *é diagonalizável.*

d) Resolva a equação $T(p(x)) = 3v_3$.

Resolução:

a) Escrevendo as componentes destes vectores em relação à base $B_1 = (1, x, x^2, x^3)$ de P_3 como linhas de uma matriz e usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

concluímos que, dado que a dimensão do espaço das linhas da matriz é 4, também a expansão linear $L(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ tem dimensão 4 (igual à dimensão de P_3), donde $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de P_3.

b) Como $T(v_1) = v_3, T(v_2) = v_3, T(v_3) = v_1, T(v_4) = v_1$, a matriz que representa T em relação à base B (ou seja $M(T; B)$) é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O espaço de colunas desta matriz é $L(\{(0,0,1,0), (1,0,0,0)\})$, e logo $ImT = \{v \in P_3 : v_B \in EC(A)\} = L(\{v_3, v_1\})$.

O núcleo de A é

$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z + w = 0\} =$

$= \{(-y, y, -w, w) : y, w \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\})$, e logo

Nuc $T = \{v \in P_3 : v_B \in Nuc(A)\} = L(\{-v_1 + v_2, -v_3 + v_4\})$.

O polinómio característico $P_A(\lambda)$ de A é

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (-\lambda)\Big((-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}\Big) = (-\lambda)(-\lambda^3 + \lambda)$$
$$= \lambda^2(\lambda^2 - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Logo os valores próprios de T são $0, 1, -1$.

O subespaço próprio associado a 0 é o núcleo de T, que já foi determinado.

Temos $A - 1I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

concluímos que

Nuc $(A - 1I_4) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : -x + z = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } w = 0\} = \{(x, 0, x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 1, 0)\})$ donde o subespaço próprio de V associado a 1 é o subespaço $L(\{v_1 + v_3\})$.

Temos $A + 1I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

concluímos que

Nuc $(A - 1I_4) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } w = 0\} = L(\{(-1, 0, 1, 0)\})$ donde o subespaço próprio de V associado a -1 é o subespaço $L(\{-v_1 + v_3\})$.

c) Seja G a matriz de mudança de base, da base B para a base B_1

$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

A matriz G^{-1} é a matriz de mudança de base, da base B_1 para a base B e pode ser determinada pelo método de Gauss-Jordan ou usando a matriz dos cofactores obtendo-se

$$G^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $A = M(T; B)$ temos que $C = M(T; B_1) = GAG^{-1}$ (calcule C!).

Dado que, pelas alíneas anteriores, sabemos que a soma das dimensões dos subespaços próprios de T é 4, a transformação T é diagonalizável ou seja P_3 admite uma base B_3 constituída por vectores próprios de T. A matriz, D, que representa T em relação a esta base é diagonal e C é semelhante a D, por representar T em relação a outra base de P_3. Logo C é diagonalizável.

d) As soluções da equação $T(p(x)) = 3v_3$ são exactamente os elementos da imagem completa inversa $T^{-1}(v_3)$. Sabemos que $T(v_1) = v_3$ pelo que $T(3v_1) = 3v_3$ e logo as soluções da equação dada são os elementos de $3v_1 + NucT$. Se quisermos descrever em extensão este conjunto obtemos $3v_1 + NucT = \{(3-a)v_1 + av_2 - bv_3 + bv_4 : a, b \in \mathbb{R}\}$, dado que

Nuc $T = L(\{-v_1 + v_2, -v_3 + v_4\}) = \{-av_1 + av_2 - bv_3 + bv_4 : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Ideia para uma resolução alternativa As coordenadas do vector $3v_3$ em relação à base B são $(0, 0, 3, 0)$ e logo

$$T^{-1}(v_3) = \left\{ v \in V : v_B \text{ é solução de } AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Resolvendo este sistema obtemos o conjunto das soluções pretendido.

Exercício 3: (problema 7 da ficha 8)

Seja $\mathcal{P}_4$ o espaço dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 4 e $T : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = p''(x) - 2xp'(x)$

a) Determine as dimensões da imagem e do núcleo de T e indique uma base do núcleo de T.

b) Resolva em $\mathcal{P}_4$ a equação diferencial $p''(x) - 2xp'(x) = 6(x - x^3)$.

c) Determine, se existirem, os valores próprios de T e os subespaços próprios correspondentes.

d) Diga, justificando, se T é diagonalizável.

Resolução:

a) Consideremos a base $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ de $\mathcal{P}_4$. Como $T(1) = 0$, $T(x) = -2x$, $T(x^2) = 2 - 4x^2$, $T(x^3) = 6x - 6x^3$, $T(x^4) = 12x^2 - 8x^4$, temos

$$A = M(T; B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Temos que

$$NucT = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 : (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in NucA\}$$

Como, usando eliminação de Gauss podemos passar de A à matriz

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \text{ obtemos}$$

$NucA = \{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_2 = 0 \text{ e } a_1 = 0 \text{ e } a_3 = 0 \text{ e } a_4 = 0\} = \{(a_0, 0, 0, 0, 0) : a_0 \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0, 0, 0)\})$ donde $NucT = L(\{1\})$ e uma base de $NucT$ é constituída pelo polinómio 1.

Dado que a dimensão do núcleo de T é 1 e a dimensão de $\mathcal{P}_4$ é 5 obtemos que a dimensão da imagem de T é 4.

Nota: Embora não fosse pedido neste exercício para obter uma base para a imagem de T, bastava observar que uma base para o espaço das colunas $EC(A)$ de A é constituída pelos vectores $(0, -2, 0, 0, 0), (2, 0, -4, 0, 0), (0, 6, 0, -6, 0), (0, 0, 12, 0, -8)$.

Como $\operatorname{Im} T = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 : (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in EC(A)\}$, $(-2x, 2 - 4x^2, 6x - 6x^3, 12x^2 - 8x^4)$ é uma base para a imagem de T.

b) Queremos determinar os polinómios $p(x) \in \mathcal{P}_4$ tais que $T(p(x)) = 6(x - x^3)$. Pela alínea a) sabemos que $T(x^3) = 6x - 6x^3$ e logo

$$\big\{p(x) : T(p(x)) = 6(x - x^3)\big\} = T^{-1}(6x - 6x^3) = x^3 + Nuc\,T,$$

ou seja os polinómios $p(x)$ tais que $T(x^3) = 6x - 6x^3$ são os polinómios da forma $x^3 + a, a \in \mathbb{R}$

Resolução alternativa

Queremos determinar os polinómios $p(x) \in \mathcal{P}_4$ tais que $T(p(x)) = 6(x - x^3)$.

Estes são os polinómios $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ tais que $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ é solução de $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dado um sistema de equações a n incógnitas representado por $MX = B$ temos que o conjunto das soluções se pode escrever na forma $(a_1, ..., a_n) + NucM$ onde $(a_1, ..., a_n)$ é uma solução particular de $MX = B$.

Como por exemplo $(0, 0, 0, 1, 0)$ é solução particular do sistema $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$ concluímos que o conjunto de soluções deste sistema é

$$(0, 0, 0, 1, 0) + NucA = \{(a, 0, 0, 1, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Logo os polinómios $p(x)$ tais que $T(x^3) = 6x - 6x^3$ são os polinómios cujas coordenadas em relação à base B pertencem a $\{(a, 0, 0, 1, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ ou seja os polinómios da forma $x^3 + a, a \in \mathbb{R}$.

c) e d) Sendo $A = M(T; B)$ a matriz calculada na alínea a) temos que o polinómio característico $P_A(\lambda)$ de A é

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (-\lambda)(-2-\lambda)(-4-\lambda)(-6-\lambda)(-8-\lambda).$$

As raízes do polinómio característico são $0, -2, -4, -6, -8$. Logo T tem cinco valores próprios distintos e portanto, dado que $\mathcal{P}_4$ tem dimensão 5, T é diagonalizável, e cada subespaço próprio tem dimensão 1.

O subespaço próprio associado a 0 é o núcleo de T que já foi determinado na alínea a). Como $T(x) = -2x$, o subespaço próprio associado a -2 (que tem dimensão 1) é o subespaço $L(\{x\})$.

Temos $A+4I_4=\begin{bmatrix}4&0&2&0&0\\0&2&0&6&0\\0&0&0&0&12\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-4\end{bmatrix}$

Usando eliminação de Gauss-Jordan obtemos

$$\begin{bmatrix}4&0&2&0&0\\0&2&0&6&0\\0&0&0&0&12\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4&0&2&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-4\end{bmatrix}$$

Logo Nuc $(A+4I_4)=\{(x,y,z,w,t)\in\mathbb{R}^5 : 2x+z=0$ e $y=0$ e $w=0$ e $t=0\}=\{(x,0,-2x,0,0) : y\in\mathbb{R}\}=L(\{(1,0,-2,0,0)\})$ donde o subespaço próprio de $\mathcal{P}_4$ associado a -4 é o subespaço $L(\{1-2x^2\})$.

Analogamente pode-se verificar que o subespaço próprio de $\mathcal{P}_4$ associado a -6 é o subespaço $L(\{3x-2x^3\})$ e o subespaço próprio de $\mathcal{P}_4$ associado a -8 é o subespaço $L(\{3-12x^2+4x^4\})$.

Nota Dado que T é diagonalizável, a matriz A também o é. Para obter uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal basta tomar P como sendo a matriz de mudança de base, da base B_1 para a base B, onde B_1 é uma base de vectores próprios de T. Assim se $B_1=(1,x,1-2x^2,3x-2x^3,3-12x^2+4x^4)$, temos

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&0&3&0\\0&0&-2&0&-12\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&4\end{bmatrix}\text{ e }P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-2&0&0&0\\0&0&-4&0&0\\0&0&0&-6&0\\0&0&0&0&-8\end{bmatrix}.$$

Se tivessemos tomado $B_2=(3-12x^2+4x^4,x,1-2x^2,3x-2x^3,1)$ teríamos com P' a matriz de mudança de base, da base B_2 para a base B,

$$P'=\begin{bmatrix}3&0&1&0&1\\0&1&0&3&0\\-12&0&-2&0&0\\0&0&0&-2&0\\4&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{e } P'^{-1}AP' = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4:

Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: Se $T : V \to V$ *é uma transformação linear não sobrejectiva de um espaço vectorial de dimensão finita, então* T *admite pelo menos um valor próprio.*

Resolução:

A afirmação é verdadeira, pois 0 é valor próprio de T. Com efeito, dado que V tem dimensão finita e T não é sobrejectiva, o núcleo de T é diferente de $\{0_V\}$ (pelo teorema das dimensões para transformações lineares) e logo 0 é valor próprio de T.