Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2004/05

---

# $8^{a}$ **Lista de Exercícios**

---

**Problema 1.**
Suponha que $v$ é um vector próprio de uma transformação linear invertível $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associado a um valor próprio $\lambda$. Mostre que $v$ também é um vector próprio de $T^{-1}$ e determine o valor próprio de $T^{-1}$ que lhe está associado.

**Problema 2.**
Suponha que $T : V \to V$ tem um vector próprio $v$ associado a um valor próprio $\lambda$. Mostre que $v$ é um vector próprio de $T^2$ associado ao valor próprio $\lambda^2$.

**Problema 3.**
Encontre subespaços invariantes por $T$ , quando $T$ é a seguinte transformação linear:

a) A reflexão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano-$xy$ e a reflexão relativamente ao plano-$yz$;
b) A projecção ortogonal de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano-$xy$ e a projecção sobre o plano-$xz$;
c) A rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$;

**Problema 4.**
Considere as seguintes matrizes, que representam transformações lineares relativamente à base canónica. Para cada uma delas encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

$$a)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad e)\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad f)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Problema 5.** Encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios de $A^{25}$, em que $A$ é a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Problema 6.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T((x, y, z)) = (3x + y - 3z, x + 3y - 3z, z)$

a) Diga se o vector $(1, 2, 3)$ é um vector próprio de $T$.
b) Determine a matriz A que representa $T$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.
c) Diga, justificando, se $T$ é diagonalizável.
d) Diga, justificando, se $A$ é diagonalizável, e no caso de o ser, determine $S$ tal que $S^{-1}AS$ seja uma matriz diagonal.

**Problema 7.** Seja $\mathcal{P}_4$ o espaço dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 4 e $T : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = p''(x) - 2xp'(x)$

a) Determine as dimensões da imagem e do núcleo de T e indique uma base do núcleo de T.
b) Resolva a equação diferencial $p''(x) - 2xp'(x) = 6(x - x^3)$.
c) Determine, se existirem, os valores próprios de $T$ e os subespaços próprios correspondentes.
d) Diga, justificando, se $T$ é diagonalizável.

**Problema 8.**

Entre as matrizes dadas, determine quais as que são diagonalizáveis. Em caso afirmativo encontre a matriz $S$ que diagonaliza a matriz dada $A$ (ou seja tal que $S^{-1}AS$ é diagonal).

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Problema 9.**

a) Dê um exemplo, se existir, de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que 0 seja valor prṕrio de $T$ e tal que o vector $(2, 1, 1)$ seja vector próprio de $T$ associado ao valor próprio $\pi$.
b) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2. Dê um exemplo, se existir, de uma transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que $\mathrm{Nuc}T \neq \{0\}$ e tal que $T(2 + t + t^2) = 2\pi + \pi t + \pi t^2$.

---

Exercícios de escolha múltipla

---

**10.** Sejam $u, v$ e $w$ vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ e $A$ uma matriz $3 \times 3$ tal que $Au = 2u$, $Av = 0$ e $Aw = w$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ $B = (u, v, w)$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.
☐ A matriz $A$ não é invertível.
☐ A matriz $A$ não é diagonalizável.
☐ $\lambda = 1$ não é um valor próprio de $A$.

---

**11.** Seja $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2}$ uma matriz real , $2 \times 2$, tal que $a_{11} + a_{22} = 0$ e $\det(A) = 1$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ Zero é um valor próprio de $A$.
☐ O polinómio característico de $A$ é $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$
☐ A matriz $A$ não tem valores próprios complexos.
☐ 1 e $-1$ são valores próprios de $A$.

---