Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2004/05

6^{a} Lista de Exercícios

Problema 1.

Diga, justificando, quais das seguintes funcções constituem transformações lineares.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$.
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$.
d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$.
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$.
f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 5x_2)$.

Problema 2.

Considere os vectores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ do espaço linear W, e $T : W \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(\mathbf{v_1}) = (1, -1, 2)$, $T(\mathbf{v_2}) = (0, 3, 2)$, $T(\mathbf{v_3}) = (-3, 1, 2)$. Encontre $T(2\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2} + 4\mathbf{v_3})$.

Problema 3.

Determine a matriz que representa cada uma das transformações lineares abaixo, em relação à base canónica no espaço de partida e à base canónica no espaço de chegada.

a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.
c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$.
d) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$.
e) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$.
f) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$.

Problema 4.

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

a) Mostre que $T(0) = 0$.
b) Conclua que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde $T(x, y) = (2x - y, x + y + 1, x)$, não é uma transformação linear.

Problema 5.

Use a transformação linear dada por multiplicação por uma matriz para calcular os seguintes transformados:

a) A reflexão de $(-1, 2)$ relativamente ao eixo dos xx e à recta $x = y$;
b) A reflexão de $(2, -5, 3)$ relativamente ao plano xy e ao plano yz;
c) A projecção ortogonal de $(2, -5)$ no eixo dos xx e dos yy;
d) A projecção ortogonal de $(-2, 1, 3)$ sobre o plano xy e o plano xz;
e) A rotação de $(3, -4)$ em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$ e de $\pi/4$.

Problema 6. Seja $\mathcal{M}_{2\times 2}$ o espaço das matrizes 2×2. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ a aplicação $T(A) = A + A^t$.

a) Mostre que T é uma transformação linear.
b) Determine a matriz K que representa T em relação à base ordenada

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.
c) Determine bases para o núcleo e para a imagem de T.
d) Diga, justificando, se T é injectiva ou sobrejectiva.
e) Sendo $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ determine $T^{-1}(M)$.

Observação: *Dada uma função $f : A \to B$ e $b \in B$, define-se a imagem completa inversa de b como sendo $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$). Note que o conjunto $f^{-1}(b)$ está definido mesmo que não exista a função inversa de f.*

Problema 7. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a aplicação definida por $Tp(x) = 2p(x) + p'(x)$.

a) Determine a matriz que representa T em relação a alguma base ordenada de $\mathcal{P}_2$.
b) Decida se T é invertível.
c) Calcule $T^{-1}(2 - x^2)$.

Problema 8. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Considere a função $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $Dp(x) = p'(x)$.

a) Verifique que D é uma transformação linear de $\mathcal{P}_2$ em $\mathcal{P}_2$ e determine a matriz A que representa D em relação à base ordenada $\mathcal{B}_1 = (1, x, x^2)$ de $\mathcal{P}_2$.
b) Determine bases para o núcleo e para a imagem de D.
c) Determine $D^{-1}(x + 1)$ e $D^{-1}(x)$.

d) Considere a base $\mathcal{B}_2 = (1+x+x^2, 1+x-x^2, -1+x+x^2)$ de $\mathcal{P}_2$. Determine a matriz M de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$ e a matriz B que representa D em relação à base ordenada $\mathcal{B}_2$.

e) Sendo I a transformação identidade em $\mathcal{P}_2$, prove que $D^2 + I$ é uma transformação linear.

f) Determine a matriz C que representa $D^2 + I$ em relação à base ordenada $(1, x, x^2)$.

g) Determine bases para o núcleo e para a imagem de $D^2 + I$.

Exercícios de escolha múltipla

---

9. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x, y, z) = (x + 1, y, 2z + x), \qquad S(x, y, z) = (2x, y - z).$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ S e T são transformações lineares.
☐ $S \circ T$ não é uma transformação linear.
☐ O espaço de chegada de $S \circ T$ é $\mathbb{R}^3$.
☐ T é uma transformação linear invertível.

---

10. Seja $T : M^{2\times 2} \to M^{2\times 2}$ a transformação linear definida no espaço linear das matrizes reais 2×2 por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b-c \\ b-c & d \end{bmatrix}$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ T é sobrejectiva.
☐ T é invertível.
☐ A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ pertence ao núcleo de T.
☐ O contradomínio de T é o subespaço linear das matrizes 2×2 simétricas.