Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2004/05

1^{a} **Lista de Exercícios**

Problema 1. Calcule, se possível, os produtos AB e BA, quando:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} \end{bmatrix}$

Problema 2. Para cada par de matrizes A e B abaixo indicadas determinar, quando estiverem definidas, as matrizes $A+2B$, $A-B$, A^2, B^2, AB e BA.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = [2]$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Problema 3. Obtenha uma formula para A^n, onde A é a seguinte matriz:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

Problema 4. Sendo A e B duas matrizes quadradas, será verdade que se o produto AB se anula, então se tem necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$?

Problema 5. Suponha que A comuta com qualquer matriz 2×2; em particular

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e com } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $a = d$ e que $b = c = 0$, pelo que A é um múltiplo da matriz identidade.

Estas matrizes, conhecidas como *matrizes escalares*, são as únicas que comutam com todas as outras.

Problema 6. Seja E_5 uma matriz quadrada escalar (veja definição no problema anterior), $m \times m$, com elementos diagonais todos iguais a 5. Mostre que

1. $E_5\ A = 5A$, para toda a matriz $A_{m\times n}$.
2. $B_{n\times m}$, $B\ E_5 = 5B$, para toda a matriz $B_{n\times m}$.

Problema 7. Quais das seguintes equações são equações lineares em x, y e z?

a) $x + 5y - \sqrt{2}z = 1$ b) $x^{-2} + y - 3z = -3$
c) $x = -2y + \pi$

Problema 8. Quais das seguintes matrizes 3×3 são matrizes em escada por linhas? Indique as respectivas características.

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad g)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i)\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad j)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad k)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad l)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 9. Determine a característica de cada uma das matrizes seguintes (i denota a unidade imaginária $\sqrt{-1}$):

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} -1 & 1+2i \\ -3+i & 5+5i \end{bmatrix}$$

Exercícios de escolha múltipla

10. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, diga qual das afirmações seguintes é verdadeira.

☐ A característica de A é 3.
☐ A característica de A é 2.
☐ A característica de A depende dos valores de α e de β.
☐ A característica de A é 1.

11. A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz elementar. Sendo B uma matriz 2×2, então BA é a matriz que se obtém de B:

☐ trocando a 1º linha com a 2º linha .
☐ trocando a 1º coluna com a 2º coluna .
☐ substituindo a 2º linha de B pela soma da 2º linha com a 1º multiplicada por 2.
☐ substituindo a 2º coluna de B pela soma da 2º coluna com a 1º multiplicada por 2.

12. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2-i & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3-i & 1 & 2i & 4-i \\ 0 & 3 & -2i & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2-i \end{bmatrix}$$

e a seguinte lista de afirmações:

I É possível efectuar AB.
II A^2C é uma matriz quadrada.
III A não é invertível.
IV CC^t não é uma matriz quadrada.

A lista completa de afirmações correctas é

☐ I e III e IV ☐ I e III ☐ II e IV ☐ I e II e III