Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º ano — 2003/04

6^{a} **Lista de Exercícios**

Problema 1.
Diga, justificando, quais das seguintes funcções constituem transformações lineares.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$.
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$.
d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$.
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$.
f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 5x_2)$.

Problema 2.
Seja $S = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ de $\mathbb{R}^2$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$, em que $\mathbf{v_1} = (-2, 1)$ e $\mathbf{v_2} = (1, 3)$. Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{v_1}) = (-1, 2, 0)$ e $T(\mathbf{v_2}) = (0, -3, 5)$.
Encontre a fórmula para $T(x_1, x_2)$ e use-a para calcular $T(2, -3)$.

Problema 3.
Seja $S = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$, em que $\mathbf{v_1} = (1, 2, 1,)$, $\mathbf{v_2} = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v_3} = (3, 3, 4)$, e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(\mathbf{v_1}) = (1, 0)$, $T(\mathbf{v_2}) = (-1, 1)$ e $T(\mathbf{v_3}) = (0, 1)$.
Determine a fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ e use-a para calcular $T(7, 13, 7)$.

Problema 4.
Considere os vectores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ do espaço linear W, e $T : W \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(\mathbf{v_1}) = (1, -1, 2)$, $T(\mathbf{v_2}) = (0, 3, 2)$, $T(\mathbf{v_3}) = (-3, 1, 2)$. Encontre $T(2\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2} + 4\mathbf{v_3})$.

Problema 5.

Determine a matriz que representa cada uma das transformações lineares abaixo, em relação à base canónica no espaço de partida e à base canónica no espaço de chegada.

a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.
c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$.
d) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$.
e) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$.
f) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$.

Problema 6.

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

a) Mostre que $T(0) = 0$.
b) Conclua que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde $T(x, y) = (2x - y, x + y + 1, x)$, não é uma transformação linear.

Problema 7.

Use a transformação linear de multiplicação por uma matriz para calcular os seguintes transformados:

a) A reflexão de $(-1, 2)$ relativamente ao eixo dos xx e à recta $x = y$;
b) A reflexão de $(2, -5, 3)$ relativamente ao plano xy e ao plano yz;
c) A projecção ortogonal de $(2, -5)$ no eixo dos xx e dos yy;
d) A projecção ortogonal de $(-2, 1, 3)$ sobre o plano xy e o plano xz;
e) A rotação de $(3, -4)$ em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$ e de $\pi/4$.