Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º ano — 2003/04

4ª Lista de Exercícios

Problema 1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de soma vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$:

a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0)$ com a real.
b) O conjunto de vectores da forma $(a, 1, 1)$ com a real.
c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e a, b, c reais.
d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com a, b, c inteiros.
e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c + 1$ e a, b, c reais.

Problema 2.

Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de soma vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0, 1)$ com a real
b) O conjunto de vectores da forma $(a, b, 0, 0)$ com a, b reais.
c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $b = a + c - d$ e $c = 2d$, sendo a, b, c, d reais.
d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com a, b, c, d positivos.
e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $c = a + b + 1$ e $d = 2a - b$, sendo a, b, c reais.

Problema 3.

Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são espaços lineares (considere as operações usuais de adição e multiplicação por um número real).

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$.
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \wedge x - 2y - z = 0\}$.
d) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 2\}$.
e) Conjunto das matrizes $m \times n$.
f) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares inferiores.
g) Conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares inferiores não singulares.

h) Conjunto das matrizes singulares $n \times n$.
i) Conjunto das matrizes $n \times n$ que comutam com uma dada matriz A.
j) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}$ (funções ímpares)
k) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(x + 2\pi)\}$ (funções periódicas de período 2π)
l) $\{$ polinómios reais $p(x)$ que se anulam em $x = 0$ $\}$
m) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ tem segunda derivada contínua e $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0\}$, onde a e b são dois números reais dados.
n) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ tem segunda derivada contínua e $f''(x) + af'(x) + bf(x) = \cos x\}$, onde a e b são dois números reais dados.

Problema 4.
Mostre que se U e V são subespaços lineares de um espaço W, então $U \cap V$ e $U + V$ também são subespaços lineares de W.

Problema 5.
Determine o núcleo (espaço nulo) das seguintes matrizes:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c)\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Problema 6.
Mostre que se V é um espaço linear, e se S é um subconjunto não vazio de V, então $L(S)$, a expansão linear de S, é um subespaço linear de V.

Problema 7.
Exprima cada um dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.

a) $(-9, -7, -15)$
b) $(6, 11, 6)$
c) $(0, 0, 0)$

Problema 8.
Considere $\mathbf{v_1} = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v_2} = (3, -1, 5, 2)$ e $\mathbf{v_3} = (-1, 0, 2, 1)$, vectores em $\mathbb{R}^4$. Quais dos vectores seguintes pertencem à expansão linear $\mathrm{L}(\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\})$?

a) $(2, 3, -7, 3)$
b) $(0, 0, 0, 0)$
c) $(1, 1, 1, 1)$
d) $(-4, 6, -13, 4)$

Problema 9.
Seja W o subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ constituído pela expansão linear dos vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 0, 0)$ e $\mathbf{w} = (0, -2, 0, 0)$.

a) Mostre que $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ não é uma base de W.
b) Determine a dimensão e uma base de W.

Problema 10.

Determine as coordenadas do vector $\mathbf{v}$ nas seguintes bases ordenadas S:

a) $\mathbf{v} = (2, 1)$; $S = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$, com $\mathbf{v_1} = (1, 0)$, $\mathbf{v_2} = (0, 1)$;
b) $\mathbf{v} = (2, 1)$; $S = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$, com $\mathbf{v_1} = (1, 0)$, $\mathbf{v_2} = (2, 2)$;
c) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $S = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$, com $\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v_2} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v_3} = (0, 0, 1)$;
d) $\mathbf{v} = (1, 0, 2, -1)$; $S = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})$, com $\mathbf{v_1} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v_2} = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v_3} = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{v_4} = (1, 1, 1, 1)$.

Problema 11.

Exprima a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.